MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
JENA

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY
E. HECKE G. HERGLOTZ O. PERRON
W. SÜSS W. THRELFALL H. WEYL

49. BAND 4. UND 5. (SCHLUSS-) HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 18. APRIL 1944)

BERLIN
SPRINGER-VERLAG
1944

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

erscheint in zwanglosen Heften, die zu Bänden von etwa 50 Bogen vereinigt werden.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden natürlich auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich. Weitere 125 Exemplare werden, falls bei Rücksendung der 1. Korrektur bestellt, gegen eine angemessene Entschädigung geliefert. Darüber hinaus gewünschte Exemplare müssen zum Bogennettopreise berechnet werden. Mit der Lieferung von Dissertationsexemplaren befaßt sich die Verlagsbuchhandlung grundsätzlich nicht; sie stellt jedoch den Doktoranden den Satz zur Verfügung zwecks Anfertigung der Dissertationsexemplare durch die Druckerei.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Eßlinger Straße 16,
K. Knopp, Tübingen, Waldhäuser Straße 105,
R. Nevanlinna, Helsinki, Pietarink 5 a,
E. Schmidt, Berlin-Charlottenburg 2, Bismarckstraße 107IV,
F. K. Schmidt, Flughafen Ainring, Post Freilassing (Obb.).

49. Band. **Inhalt:** 4. und 5. Heft.

Seite

Wagner, SS-Strm. E., 22 728 A [Heimatanschrift: Trautenau (Sud.), Gartenstadt 18]: Über Shodasche Matrizen und Polynome in einer Matrix 516

Lyra, Doz. Dr. G., Göttingen, Mathem. Inst., Bunsenstraße 3—5: Zur Theorie der C- und H-Summierbarkeit negativer Ordnung 538

Dinghas, Dr. habil. A., Berlin-Köpenick, Siedlung Wolfsgarten, Däumlingsweg 2, bei Dammann: Über eine algebraische Identität zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel von n positiven Zahlen 563

Eichler, M., 5. VKN., Quartier 14, Karlshagen 2 in Pommern: Eine Verallgemeinerung des Rungeschen Satzes 565

Neder, Prof. Dr. L., Münster i. Westf., Gertrudenstraße 39: Über den Zusammenhang zweier Sätze von Lebesgue und Toeplitz 576

Wittich, Doz. Dr. H., Göttingen, Aerodynamische Versuchsanstalt, Bunsenstraße 10: Ganze Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$ 579

Bilharz, Dr. H., Braunschweig, LFA., Postfach 390: Zur Reduktion von Bewegungsgleichungen auf die Lagrangesche Form 583

Strutt, Dr. M. J. O., Eindhoven (Holland), Joh. Vesterssstraße 40: Reelle Eigenwerte verallgemeinerter Hillscher Eigenwertaufgaben 2. Ordnung 593

Neder, Prof. Dr. L., Münster i. Westf., Gertrudenstraße 39: Ein Satz über die absolute Konvergenz der Fourier-Reihe 644

Lorenzen, Dr. P., Wesermünde-L., Hafenstraße 92: Eine Bemerkung zum Schreierschen Verfeinerungssatz 647

Perron, Prof. Dr. O., München 27, Friedrich-Herschel-Straße 11: Studien über den Vielfachheitsbegriff und den Bézoutschen Satz 654

Fan, Dr. Ky, Paris Ve 7, Rue Malebranche: Entfernung zweier zufälligen Größen und die Konvergenz nach Wahrscheinlichkeit 681

Horn, Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. J., Darmstadt, Mathildenstraße 10: Integration linearer Differentialgleichungen durch Laplacesche Integrale. II. 684

Rellich, Prof. Dr. F., Lehrstuhl für reine Mathematik, Dresden A 24, Bismarckplatz, T. H.: Die zulässigen Randbedingungen bei den singulären Eigenwertproblemen der mathematischen Physik. (Gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung) 702

Lorentz, Dr. G., Tübingen, Mathem. Institut d. Universität: Über die Mittelwerte der Funktionen eines Orthogonalsystems 724

Dinghas, Dr. habil. A., Berlin-Köpenick, Siedlung Wolfsgarten, Däumlingsweg 2, bei Dammann: Über eine isoperimetrische Aufgabe von Erhard Schmidt, I. 734

Berichtigungen zu der Arbeit Zaubeck, Bd. 49, S. 197—218 792

Über Shodasche Matrizen und Polynome in einer Matrix.

Von

Edwin Wagner, z. Z. im Felde.

Einleitung.

Wir betrachten quadratische Matrizen von n Zeilen und Spalten, deren Elemente einem kommutativen Körper $\mathfrak{K}$ der Charakteristik 0 angehören. Die Eigenschaft eines Matrizenpaares A, B, die Gleichung

$$A = f(B) \tag{1}$$

zu erfüllen, wo $f(t)$ ein gegebenes Polynom des Ringes $\mathfrak{K}[t]$ bedeutet, bleibt erhalten bei gleichzeitiger Transformation beider Matrizen des Paares mit der gleichen Transformationsmatrix T. Fassen wir also alle geordneten Matrizenpaare A, B, die aus einem festen Paare A_0, B_0 durch gleichzeitige Transformation

$$\begin{aligned} A &= T A_0 T^{-1}, \\ B &= T B_0 T^{-1} \end{aligned} \tag{2}$$

entstehen, zu einer Klasse zusammen, so können wir sagen: Die Eigenschaft, der Gleichung (1) zu genügen, ist Klasseneigenschaft und muß sich als solche an geeigneten Klasseninvarianten ablesen lassen.

Die Frage der Klassifikation der Matrizenpaare A, B ist durch die Arbeit von S. Kantor über „Die Äquivalenz von linearen ∞^λ-Schaaren bilinearer Formen“ (Sitzungsber. der Bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 98, 1897) im wesentlichen gelöst. Bequemere Invarianten für den hier allein in Frage kommenden Fall vertauschbarer Matrizen liefern indessen die Shodaschen Matrizen der Paare vertauschbarer Matrizen, wie im folgenden gezeigt werden soll.

§ 1.

S-Ideale und Shodasche Matrizen.

Gegeben sei ein System von Polynomen des Ringes $\mathfrak{K}[t]$ mit dem höchsten Koeffizient 1, von denen jedes folgende Teiler des vorhergehenden ist:

$$\begin{aligned} &a_0(t), \quad a_1(t), \ldots a_{s-1}(t) \\ &a_i(t) \mid a_{i-1}(t). \end{aligned} \tag{3}$$

Unter einer zur Reihe (3) gehörigen Shodaschen Matrix (Sh. M.) verstehen wir eine quadratische Matrix von s Zeilen und Spalten, deren Elemente $g_{ij}(t)$ Polynome des Ringes $\mathfrak{R}[t]$ sind, wobei $g_{ij}(t)$ teilbar ist durch $\frac{a_j}{a_i}$, wenn $j < i$.

$$(4)\quad \mathsf{B} = \begin{Bmatrix} h_{00}(t) & h_{01}(t) & h_{02}(t) & \dots & h_{0,s-1}(t) \\ \frac{a_0}{a_1} h_{10}(t) & h_{11}(t) & h_{12}(t) & \dots & h_{1,s-1}(t) \\ \frac{a_0}{a_2} h_{20}(t) & \frac{a_1}{a_2} h_{21}(t) & h_{22}(t) & \dots & h_{2,s-1}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_0}{a_{s-1}} h_{s-1,0}(t) & \frac{a_1}{a_{s-1}} h_{s-1,1}(t) & \frac{a_2}{a_{s-1}} h_{s-1,2}(t) & \dots & h_{s-1,s-1}(t) \end{Bmatrix}.$$

Matrizen der Gestalt (4) treten in der Literatur wohl zum erstenmal in der Arbeit von K. Shoda[1]), „Über die mit einer Matrix vertauschbaren Matrizen“ [Math. Zeitschr. Bd. 29, S. 700, Gleichung (1)] auf, wo gezeigt wird, daß jeder Automorphismus B einer Elementarteilergruppe $\mathfrak{A}_A$ mit dem Operatorenbereich $\mathfrak{R}_A = \mathfrak{R}[A]$ (siehe W. Krull, Theorie und Anwendung der verallgemeinerten Abelschen Gruppen. Sitzungsber. d. Heidelberger Akad. d. Wissensch., Jahrg. 1926) durch eine Matrix der Form (4) eindeutig bestimmt ist. Ein ähnliches Resultat enthält die Arbeit von O. Schreier und B. L. van der Waerden, „Die Automorphismen der projektiven Gruppe“ (Abh. aus dem Mathem. Seminar der Hamburger Universität, Bd. 6).

Der tiefere Grund für das Auftreten der Matrix (4) ist aber idealtheoretischer Natur, wie im folgenden gezeigt wird:

Wir betrachten jene vom Einheitsideal verschiedenen Ideale des Polynomringes $\mathfrak{R}[x, t]$, welche sowohl ein Polynom $u(t)$, welches nur von t, als auch ein Polynom $v(t, x)$, dessen Koeffizient bei der höchsten x-Potenz nicht von t abhängt, enthalten. Solche Ideale seien zur Abkürzung S-Ideale genannt (S-I.). Sie sind offenbar die nulldimensionalen Ideale von $\mathfrak{R}[x, t]$. Zwischen S-I. und Sh.M. besteht eine einfache Beziehung, wie der folgende Satz zeigt:

1. Satz. *Jedes S-Ideal des Ringes $\mathfrak{R}[x, t]$ wird durch eine Shodasche Matrix eindeutig bestimmt und jede Shodasche Matrix bestimmt eindeutig ein S-Ideal.*

Beweis. 1. Sei $\mathfrak{a}$ ein S-I. des Ringes $\mathfrak{R}[x, t]$. Es besitzt eine endliche Basis. Wir führen nach dem im folgenden geschilderten Verfahren eine „ausgezeichnete $\mathfrak{a}$-Basis“ ein: a) $\mathfrak{a}$ enthält nach Voraussetzung Polynome $f(t)$

[1]) Siehe außerdem: K. Shoda, Über die Automorphismen einer endlichen Abelschen Gruppe. Math. Annalen **100**, und K. Shoda, Über die charakteristischen Untergruppen einer endlichen Abelschen Gruppe. Math. Zeitschr. **31**.

die von x nicht abhängen. Dasjenige unter ihnen — $f_0(t)$ —, das einen möglichst niedrigen Grad in t besitzt, ist bis auf einen Faktor aus $\mathfrak{R}$ eindeutig bestimmt und soll so normiert werden, daß der höchste Koeffizient das Einselement von $\mathfrak{R}$ wird. Alle anderen Polynome $f(t)$ von $\mathfrak{a}$ sind dann Vielfache von $f_0(t)$.

b) $\mathfrak{a}$ enthält Polynome vom ersten Grad in x, $f_1(t, x) = a_1(t) \cdot x + p_{10}(t)$. Durch die Forderung, daß $a_1(t)$ in t von möglichst niedrigem Grade und sein höchster Koeffizient das Einselement von $\mathfrak{R}$ sei, ist $f_1(t, x)$ bis auf Vielfache von $f_0(t)$ bestimmt. Diese Unbestimmtheit durch zusätzliche Forderung an $p_{10}(t)$ wegzuschaffen, ist nicht zweckmäßig.

c) $\mathfrak{a}$ enthält Polynome vom zweiten Grade in x:

$$f_2(t, x) = a_2(t) x^2 + p_{21}(t) \cdot x + p_{20}(t).$$

Durch die Forderung, daß $a_2(t)$ in t von möglichst niedrigem Grade und sein höchster Koeffizient das Einselement sei, ist $f_2(t, x)$ bis auf Vielfache von $f_1(t, x)$ und $f_0(t)$ bestimmt.

d) Schließlich kommt man nach endlich viel Schritten zu einem Polynom $f_s(t, x)$, das als erstes einen von t freien Koeffizienten bei der höchsten Potenz von x enthält, der wieder als das Einselement angenommen wird, wodurch

$$f_s(t, x) = x^s + p_{s,s-1}(t) \cdot x^{s-1} + \cdots + p_{s,0}(t) \tag{5}$$

bis auf Vielfache der $f_i(t, x)$, $(i = 0, 1, \ldots, s-1)$ bestimmt wird. Das Verfahren endet spätestens bei dem nach Voraussetzung existierenden Polynom $v(t, x)$.

Ist $f(t, x)$ ein beliebiges Polynom aus $\mathfrak{a}$, so dividieren wir es durch $f_s(t, x)$ und erhalten einen Teilquotienten $q_s(t, x)$ und einen Rest $g_{r_1}(t, x)$ vom Grade $r_1 < s$ in x; darauf dividieren wir den Koeffizienten bei der höchsten x-Potenz von $g_{r_1}(t, x)$ durch $a_{r_1}(t)$ und erhalten einen Quotienten $q_{r_1}(t)$ und den Rest 0, weil sonst $g_{r_1}(t, x) - q_{r_1}(t) \cdot f_{r_1}(t, x)$ ein Polynom vom Grade r_1 in x mit einem Koeffizient bei x^{r_1} von noch niedrigerem Grade als $a_{r_1}(t)$ in t wäre, gegen die über f_{r_1} getroffene Voraussetzung.

$g_{r_2}(t, x) = g_{r_1}(t, x) - q_{r_1}(t) \cdot f_{r_1}(t, x)$ ist also in x vom Grade $r_2 < r_1$. Wir dividieren seinen Koeffizient bei x^{r_2} durch $a_{r_2}(t)$, erhalten den Quotient $q_{r_2}(t)$ und den Rest 0 usw. Auf diese Weise gewinnen wir für $f(t, x)$ eine Darstellung

$$f(t, x) = q_s(t, x) \cdot f_s(t, x) + q_{r_1}(t) \cdot f_{r_1}(t, x) + q_{r_2}(t) \cdot f_{r_2}(t, x) + \cdots, \tag{6}$$

womit gezeigt ist, daß die Polynome

$$f_0(t), \quad f_1(t, x), \quad f_2(t, x), \quad \ldots \; f_s(t, x) \tag{7}$$

tatsächlich eine Basis von $\mathfrak{a}$ bilden. Die Koeffizienten $q(t)$ der Darstellung (6) sind eindeutig.

Wenden wir Gleichung (6) auf das Polynom $f(t, x) = x \cdot f_i$ an, so erhalten wir

$$x \cdot f_i(t,x) = q_{i,i-1}(t) \cdot f_{i+1}(t, x) + h_{ii}(t) \cdot f_i(t, x) + \sum_{j=0}^{i-1} h_{ij}(t) \cdot f_j(t, x) \quad (i = 0, 1, \ldots s-1). \tag{8}$$

Aus der Rekursionsformel (8) folgt zunächst

$$q_{i,i+1} \cdot a_{i+1} = a_i, \tag{9}$$

es ist also a_{i+1} Teiler von a_i, also auch alle a_k Teiler von $a_0 = f_0(t)$. Darauf sieht man, daß $f_i(t, x)$ den Teiler $a_i(t)$ enthält, also

$$f_i(t, x) = a_i(t) \cdot f_0^*(t, x); \quad f_i^* = 1 = \text{Einselement von } \mathfrak{R} \quad (i = 0, 1, \ldots, s-1). \tag{10}$$

Setzt man (10) in (8) ein, und spaltet den gemeinsamen Faktor $a_i(t)$ ab, so erhält man

$$f_{i+1}^* + (h_{ii} - x) \cdot f_i^* + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{a_j}{a_i} h_{ij} \cdot (t) \cdot f_j^* = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, s-1). \tag{11}$$

Da man aus den Gleichungen (9), (10), (11) umgekehrt wieder Gleichung (8) gewinnen kann, garantieren sie, daß die Polynome (7) eine ausgezeichnete Basis des von ihnen erzeugten Ideals, das sofort als S-Ideal kenntlich ist, abgeben [d. h. daß jedes Polynom des Ideals eindeutig nach (6) ausgedrückt werden kann].

Infolge der in ihrer Erklärung steckenden Unbestimmtheit sind zwar nicht die Polynome (7) an sich, wohl aber die Ideale $\mathfrak{a}_i = (f_0, f_1, \ldots f_i)$ durch $\mathfrak{a}$ eindeutig bestimmt.

Aus Gleichung (11) können die f_k^* durch die a_i und die h_{ij} leicht ausgedrückt werden; schreibt man (11) der Reihe nach für $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$ an, so erhält man ein Gleichungssystem, aus dem sich sofort ergibt:

$$f_k^*(t, x) = \pm \begin{vmatrix} h_{00} - x & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{a^0}{a_1} h_{10} & h_{11} - x & 1 & \ldots & 0 \\ \frac{a_0}{a_2} h_{20} & \frac{a_1}{a_2} h_{21} & h_{22} - x & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{a_0}{a_{k-1}} h_{k-1,0} & \frac{a_1}{a_{k-1}} h_{k-1,1} & \frac{a_2}{a_{k-1}} h_{k-1,2} & \ldots & h_{k-1,k-1} - x \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Das S-Ideal $\mathfrak{a}$ ist also durch die Sh.M.

$$(12\,a)\quad \begin{Vmatrix} h_{00} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_0}{a_1} h_{10} & h_{11} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_0}{a_2} h_{20} & \frac{a_1}{a_2} h_{21} & h_{22} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_0}{a_{s-1}} h_{s-1,0} & \frac{a_1}{a_{s-1}} h_{s-1,1} & \frac{a_2}{a_{s-1}} h_{s-1,2} & \frac{a_3}{a_{s-1}} h_{s-1,3} & \dots & h_{s-1,s-1} \end{Vmatrix}$$

eindeutig bestimmt.

2. Ist nun umgekehrt eine zur Polynomreihe (3) gehörige Sh.M. B beliebig gegeben, so nennen wir den aus den ersten i Zeilen und Spalten von $\mathsf{B}_x = \mathsf{B} - x\,\mathsf{E}$ (E = Einheitsmatrix) gebildeten Hauptminor (mit dem Faktor ± 1) $f_i^*(t, x)$ und setzen mit $f_0^* = 1$

$$(10)\quad \begin{cases} f_i(t, x) = a_i(t) \cdot f_i^*(t, x) & (i = 0, 1, 2, \dots, s-1) \\ f_s(t, x) = f_s^*(t, x). \end{cases}$$

Das von den Polynomen

$$(7)\qquad f_0(t),\quad f_1(t, x),\quad f_2(t, x),\quad \dots\ f_s(t, x)$$

erzeugte Ideal ist offenbar ein S-Ideal. Wir zeigen, daß (7) eine ausgezeichnete Idealbasis bilden, indem wir — nach einer beim Beweis von 1. gemachten Anmerkung — das Bestehen der Gleichungen (9) und (11) nachweisen. Gleichung (9) gilt nach Voraussetzung [siehe (3)]; Gleichung (11) aber folgt aus bekannten Beziehungen über die Hauptminoren $f_i^*(t, x)$:

Bedeutet $H_k^{(i)}$ die Summe aller Hauptminoren k-ten Grades, die aus den ersten i Zeilen und Spalten von B gebildet werden können, und

$$D_k^{(i+1)} = H_k^{(i+1)} - H_k^{(i)} \qquad (i + 1 > k)$$
$$D_{i+1}^{(i+1)} = H_{i+1}^{(i+1)},$$

so gilt

$$(13)\qquad f_i^* = x^i - H_1^{(i)} x^{i-1} + H_2^{(i)} x^{i-2} - + \cdots (-1)^i H_1^{(i)}$$

daher

$$f_{i+1}^* - x f_i^* = - D_1^{(i+1)} x + D_2^{(i+1)} x^{i-1} - + \dots + (-1)^{i+1} D_{i+1}^{(i+1)},$$

woraus durch Elimination der x^k die Beziehung (14) folgt:

$$(14)\qquad \begin{vmatrix} -D_1^{(i+1)} & D_2^{(i+1)} & -D_3^{(i+1)} & \dots & (-1)^{i+1} D_{i+1}^{(i+1)} & f_{i+1}^* - x\cdot f_i^* \\ 1 & -H_1^{(i)} & H_2^{(i)} & \dots & (-1)^i H_i^{(i)} & f_i^* \\ 0 & 1 & -H_1^{(i-1)} & \dots & (-1)^{i-1} H_{i-1}^{(i-1)} & f_{i-1}^* \\ & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & & & 1 & f_0^* \end{vmatrix} = 0.$$

(14) hat bereits die Form (11); denn der Koeffizient von $f_{i+1}^* - x\cdot f_i^*$ bzw. f_{i-k}^* der Entwicklung von (14) nach der letzten Spalte ist — bis aufs Vorzeichen — gleich 1 bzw.

$$\begin{vmatrix} -D_1^{(i+1)}, & D_2^{(i+1)}, & \dots & (-1)^{k+1}\cdot D_{k+1}^{(i+1)} \\ 1, & -H_1^{(i)} & \dots & (-1)^k \cdot H_k^{(i)} \\ 0, & 1, & \dots & (-1)^{k-1}\cdot H_{k-1}^{(i-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots & -H_1^{(i-k+1)} \end{vmatrix}.$$

Daß dieser durch $\frac{a_{i-k}}{a_i}$ teilbar ist, weist man durch Induktion nach. Damit ist alles bewiesen.

Aus den Gleichungen (6) bis (11) ziehen wir einige einfache Folgerungen:

1. Hilfssatz. *Das Ideal* $\mathfrak{a}_i^* = \left(f_i^*, \frac{f_{i-1}}{a_i}, \dots, \frac{a_0}{a_i}\right)$ *ist, wenn* $a_i \neq a_0$, *ein S-Ideal; man bekommt eine ausgezeichnete Basis, wenn man in der angegebenen Basis alle* $\frac{f_k}{a_i}$, *deren höchster Koeffizient von t unabhängig ist, bis auf jenes vom niedrigsten Grade in x streicht.*

Beweis. Aus der aus (11) folgenden Gleichung $f_{k+1}^* + (h_{k,k} - x) f_k^* + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(a_j : a_i)}{(a_k : a_i)} \cdot h_{kj} \cdot f_j^* = 0$ ersieht man, daß die gestrichenen Glieder der Basis überflüssig sind. Die verbleibenden bilden aber eine ausgezeichnete Basis, weil die den Gleichungen (9) und (11) entsprechenden Gleichungen

$$(a_{k+1} : a_i) \cdot q_{k,k+1} = (a_k : a_i)$$

und

$$f_{k+1}^* + (h_{kk} - x) f_k^* + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(a_j : a_i)}{(a_k : a_i)} h_{kj} \cdot f_j^* = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

gelten.

2. Hilfssatz. *Ist* $f(x,t) \equiv 0\ (\mathfrak{a}_i)$ *und* $f(x,t)$ *vom Grade* $k < i$ *in* x, *so gilt bereits* $f(x,t) \equiv 0\ (\mathfrak{a}_k)$.

Beweis. Das Polynom $\frac{f(x,t)}{a_i(t)}$ gehört dem Ideal $\mathfrak{a}_i^*$ an. Wir können $a_i \neq a_0$ voraussetzen; im anderen Falle ist der Satz klar. In seiner eindeutig bestimmten Darstellung durch die Polynome der ausgezeichneten Basis kommen nur die Polynome $\frac{a_0}{a_i}, \frac{f_1}{a_i}, \ldots \frac{f_k}{a_i}$ vor; daher gilt bereits $\frac{f(x,t)}{a_i(t)} \equiv 0\ (\mathfrak{a}_k^*)$ und $f(x,t) \equiv 0\ (\mathfrak{a}_k)$.

3. Hilfssatz. *Ersetzt man die Elemente der k-ten Spalte des Minors* $f_i^*(x,t)$ *der Sh. M.* B_x *durch irgendwelche Elemente, z. B. die entsprechenden Elemente einer späteren Spalte, so erhält man einen Ausdruck von der Form*

$$(15_1) \qquad \sum_{j=0}^{i-1} \frac{a_j}{a_{k-1}} l_{ij}(t) \cdot f_j^*(t,x);$$

ersetzt man die Elemente einer beliebigen Zeile des Minors $f_i^*(t,x)$ *durch die entsprechenden Elemente der M-ten Zeile von* B_x, *so erhält man einen Ausdruck der Form*

$$(15_2) \qquad \sum_{j=0}^{i-1} \frac{a_j}{a_{M-1}} l_{ij}(t) \cdot f_j^* \qquad (M > i).$$

Beweis. Gleichung (11) könnte gewonnen werden durch Entwicklung des Minors f_{i+1}^* nach den Elementen seiner letzten Zeile (bzw. Spalte) und nachträgliches Ersetzen der Potenzen x^k durch Linearkombinationen der f_l^* $(l \leqq k)$ vermöge der aus (13) folgenden Beziehung

$$(16) \qquad x^k = \pm \begin{vmatrix} -H_1^{(i)}, & +H_2^{(i)} & \ldots & (-1)^i & H_i^{(i)}, & f_i^* \\ 1, & -H_1^{(i-1)} & \ldots & (-1)^{i-1} & H_{i-1}^{(i-1)}, & f_{i-1}^* \\ 0, & 1 & \ldots & (-1)^{i-2} & H_{i-2}^{(i-2)}, & f_{i-2}^* \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0, & 0 & \ldots & 1 & , & f_0^* \end{vmatrix}.$$

Da diese Entwicklung unabhängig von den Elementen $\frac{a_{k-1}}{a_i} h_{i,k-1}$ der letzten Zeile (bzw. $h_{k-1,i}$ der letzten Spalte), $(k = 1, \ldots i)$, stets zu einer Gleichung der Form (11) führen muß, müssen die algebraischen Komplemente der $\frac{a_{k-1}}{a_i} h_{i,k-1}$ (bzw. der $h_{k-1,i}$), $(k = 1, \ldots i)$, jedes einzeln nach der Einsetzung von (16) die Gestalt $\sum_{j=0}^{i-1} \frac{a_j}{a_{k-1}} l_{ij} \cdot f_j^*$ $\left(\text{bzw. } \sum_{j=0}^{i-1} \frac{a_j}{a_i} l_{ij} \cdot f_j^*\right)$ annehmen; bei Änderung der $h_{k-1,i}$ der letzten Spalte (bzw. der $h_{i,k-1}$ der

letzten Zeile) ändert sich nur f^*_{i+1} und die Größen l_{ij}, während die $f^*_0, f^*_1, \ldots f^*_i$ und die Gestalt von (15) unberührt bleiben. Man bekommt also einen Ausdruck derselben Form, wenn man nachträglich noch die $h_{k-1,i}$ (bzw. die $h_{i,k-1}$) durch die Elemente $h_{K-1,i}\, K > i$ $\left(\text{bzw. } \frac{a_i}{a_{M-1}} \cdot h_{i,M-1}\right)$ ersetzt. (Im zweiten Falle kann dann noch der Faktor $\frac{a_i}{a_{M-1}}$ aus der neuen Zeile herausgehoben werden.)

4. Hilfssatz. *Der Minor $S_i(k_1, k_2, \ldots k_n)$, welcher entsteht, wenn man in dem Minor $f^*_i(t, x)$ die Elemente der k_1-ten, k_2-ten, $\ldots$ k_n-ten Spalte durch beliebige Elemente, z. B. die entsprechenden der K_1-ten, $\ldots$ K_n-ten Spalte von B_x ersetzt, $(K_l > i)$, genügt der Kongruenz* $\frac{a_{k_1-1} \cdot a_{k_2-1} \cdots a_{k_n-1}}{a_i \cdot a_{i+1} \cdots a_{i+n-2}} \cdot S_i(k_1, \ldots k_n) \equiv 0\ (\mathfrak{a}_{i-n})$.

Beweis. Man ergänze die Reihe (3) durch eine ausreichende Anzahl von Polynomen $a_s = a_{s+1} = \cdots a_{s-1}$, ergänze durch Anfügen geeigneter Zeilen und Spalten die Matrix B zu einer zur ergänzten Polynomreihe (3) gehörigen Matrix von hinreichend hohem Grade und nehme als Induktionsvoraussetzung den Satz für $S_{i+1}(k_1, k_2, \ldots k_{n-1})$ bereits als bewiesen an.

Die gleiche Überlegung wie beim Beweis des Hilfssatzes 3 liefert den Satz für $S_i(k_1, k_2, \ldots k_n)$, wenn man den Hilfssatz 2 heranzieht.

5. Hilfssatz. *Der Minor $Z_i(M_1, M_2, \ldots M_p)$, welcher entsteht, wenn man in $f^*_i(t, x)$ die Elemente beliebiger p Zeilen, z. B. der m_1-ten, m_2-ten, $\ldots$ m_p-ten, durch die entsprechenden Elemente der M_1-ten, M_2-ten, $\ldots$ M_p-ten Zeile ersetzt; genügt der Kongruenz* $\frac{a_{M_1-1} \cdot a_{M_2-1} \cdot \ldots \cdot a_{M_p-1}}{a_i \cdot a_{i+1} \cdot \ldots \cdot a_{i+p-1}} \cdot Z_i(M_1, \ldots M_p) \equiv 0\ (\mathfrak{a}_{i-p})$.

Beweis wie bei Hilfssatz 4.

6. Hilfssatz. *Der Minor* $U_i\left(\begin{matrix} m_1 \ldots m_p \\ M_1 \ldots M_p \end{matrix} \middle| \begin{matrix} k_1 \ldots k_n \\ K_1 \ldots K_n \end{matrix}\right)$, *welcher entsteht, wenn man in $f^*_i(t, x)$ die Elemente der m_1-ten, $\ldots$ m_p-ten Zeile und nachher die Elemente der k_1-ten, k_2-ten, $\ldots$ k_n-ten Spalte durch die entsprechenden Elemente der M_1-ten, M_2-ten, $\ldots$ M_p-ten Zeile bzw. K_1-ten, K_2-ten, $\ldots$ K_n-ten Spalte ersetzt, genügt der Kongruenz* $a_i \frac{a_{k_1-1} \cdot \ldots \cdot a_{k_n-1}}{a_i \ldots a_{i+n-1}} \cdot U_i \equiv 0\ (\mathfrak{a}_g)$, $g =$ *Grad von U_i in x.*

Beweis wie bei den beiden vorhergehenden Hilfssätzen durch vollständige Induktion aus der aus Hilfssatz 5 folgenden Kongruenz $a_i \cdot Z_i(M_1, \ldots M_p) \equiv 0\ (\mathfrak{a}_{i-p})$.

7. Hilfssatz. *Der Minor, den man erhält, wenn man die Elemente der k_1-ten $\ldots$ k_n-ten Zeile des Hauptminors aus den ersten i Zeilen und Spalten*

einer beliebigen Sh. M. B *durch die entsprechenden Elemente der* K_1*-ten,* K_2*-ten, ...* K_n*-ten Zeile derselben Matrix ersetzt, genügt der Kongruenz* $Z_i \binom{k_1 \dots k_n}{K_1 \dots K_n} \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\ \frac{a_{k_1-1} \cdot a_{k_2-1} \cdot \dots a_{k_n-1}}{a_{K_1-1} \cdot a_{K_2-1} \dots a_{K_n-1}}\right)$.

Beweis durch Entwicklung nach den Majoren aus den eingetauschten Zeilen.

Für die Anwendungen auf Elementarteilergruppen ist folgende Begriffsbildung zweckmäßig:

1. *Zwei Sh. M.,* $\mathsf{B} = (g_{ij})$ *und* $\tilde{\mathsf{B}} = (\tilde{g}_{ij})$, *die zur gleichen Reihe* (3) *gehören, heißen S-gleich (geschrieben:* $\mathsf{B} = \tilde{\mathsf{B}}$*), wenn*

$$g_{ij} \equiv \tilde{g}_{ij} \quad (\mathrm{mod}\ a_j).$$

2. *Eine Sh. M. heißt regulär, wenn ihre Determinante zu* $a_0(t)$ *teilerfremd ist.*

Zu einer regulären Sh. M. B gibt es eine bis auf S-Gleichheit eindeutig bestimmte, zur gleichen Polynomreihe (3) gehörige reguläre Sh. M. B^{-1}, so daß $\mathsf{B} \cdot \mathsf{B}^{-1} = \mathsf{B}^{-1} \cdot \mathsf{B} = \mathsf{E}$. (Siehe die angeführte Arbeit von K. Shoda sowie O. Schreier und B. L. van der Waerden.)

3. *Zwei Sh. M.,* B, $\tilde{\mathsf{B}}$, *die zur gleichen Polynomreihe* (3) *gehören, heißen ähnlich, wenn eine zur gleichen Polynomreihe gehörige reguläre Sh. M.* T *existiert, so daß* $\tilde{\mathsf{B}} = \mathsf{T}^{-1} \cdot \mathsf{B} \cdot \mathsf{T}$.

2. Satz. *S-gleiche Sh. M. bestimmen dasselbe S-I.*

Beweis. Man zerlege den Minor $\tilde{f}_i^*(t, x)$ nach dem bekannten Additionssatz für Determinanten und wende auf die Summanden den Hilfssatz 4 an.

3. Satz. *Ähnliche Sh. M. bestimmen dasselbe S-I.*

Beweis. Sei $\mathsf{B}_x = \mathsf{B} - x\,\mathsf{E}$ und $\tilde{\mathsf{B}} = \mathsf{T}^{-1}\mathsf{B}\mathsf{T}$; zu B_x mögen die $f_i^*(t, x)$ und zu $\mathsf{T}^{-1}\mathsf{B}_x\mathsf{T}$ die $\tilde{f}_i^*(t, x)$ gehören (nach Satz 2 kann an Stelle von $\tilde{\mathsf{B}}_x = \tilde{\mathsf{B}} - x\,\mathsf{E}$ die Matrix $\mathsf{T}^{-1}\mathsf{B}_x\mathsf{T}$ betrachtet werden). Entwickelt man $\tilde{f}_i^*(t, x)$ nach i-reihigen Minoren der Matrizen T^{-1}, B_x, T, so erhält man einen Ausdruck der Form

$$\tilde{f}_i^*(t, x) = \sum S_i \binom{m_1 \dots m_p}{M_1 \dots M_p} \cdot U_i \left(\begin{matrix} m_1 \dots m_p \\ M_1 \dots M_p \end{matrix} \middle| \begin{matrix} k_1 \dots k_n \\ K_1 \dots K_n \end{matrix}\right) \cdot Z_i \binom{k_1 \dots k_n}{K_1 \dots K_n}.$$

Aus den Hilfssätzen 6 und 7 folgt daher

$$a_i(t) \cdot \tilde{f}_i^*(t, x) \equiv 0\ (\mathfrak{a}),$$

also

$$\tilde{\mathfrak{a}} \subseteq \mathfrak{a}.$$

Da die Ähnlichkeit eine symmetrische Eigenschaft ist, gilt auch umgekehrt

$$\mathfrak{a} \subseteq \tilde{\mathfrak{a}},$$

also

$$\tilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}.$$

Daß Satz 3 nicht umgekehrt werden kann, zeigen die beiden zur Reihe $a_0(t) = t^2$, $a_1(t) = t$ gehörigen Sh.M.

$$\mathsf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathsf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

welche dasselbe S-I. $\mathfrak{a} = (x^2, tx, t^2)$ bestimmen, ohne ähnlich zu sein; denn jede zu B_1 ähnliche hat die Form

$$\tilde{\mathsf{B}}_1 = \begin{pmatrix} \frac{b}{a_0} t & 0 \\ \frac{d}{a_0} t & 0 \end{pmatrix},$$

wenn die Transformationsmatrix T in der Gestalt

$$\mathsf{T} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 t, & b \\ c\,t & d \end{pmatrix}, \quad a_0 \neq 0 \quad d \neq 0, \qquad \mathsf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_0} + \frac{b\,c - a_1\,d}{a_0^2\,d} t, & -\frac{b}{a_0\,d} \\ -\frac{c}{a_0\,d} t, & \frac{1}{d} \end{pmatrix}$$

angenommen wird.

Faßt man alle Sh.M., die dasselbe S-I. bestimmen, zu einer *Ordnung* und alle Sh.M., die zu einer bestimmten ähnlich sind, zu einer *Klasse* zusammen, so kann also eine Ordnung mehrere Klassen enthalten. Wir denken uns von nun an das S-I. des Satzes 1 der ganzen Klasse (oder Ordnung) zugeordnet und nennen es das charakteristische Ideal der Klasse (oder Ordnung).

Von idealtheoretischen Operationen sind für das Folgende der Durchschnitt und das Produkt von Bedeutung.

Nach einem allgemeinen Satz ist jedes Ideal des Ringes $\mathfrak{R}[x, t]$ eindeutig als Durchschnitt von teilerfremden Idealen darstellbar. Eine Verschärfung dieses Satzes bei S-Idealen ermöglichen die folgenden

Hilfssätze über S-Ideale:

1. *Der Durchschnitt von endlich vielen Idealen ist dann und nur dann S-I., wenn alle Ideale S-I. waren.*

2. *Jedes S-I. enthält ein Polynom $b_0(x)$ niedrigsten Grades, das nicht von t abhängt. Es ist bis auf einen Faktor aus $\mathfrak{R}$ eindeutig bestimmt. Wir normieren es so, daß der Koeffizient bei der höchsten x-Potenz gleich 1 wird.*

3. *Ein S-I.* $\mathfrak{q}$ *ist dann und nur dann nicht mehr als Durchschnitt von teilerfremden S-I. darstellbar, wenn sowohl* $a_0(t)$ *als auch* $b_0(x)$ *Potenzen irreduzibler Polynome sind, also* $\mathfrak{q}$ *einartig ist.*

Beweis. Punkt 1, 2 ist klar, da es sich um nulldimensionale Ideale handelt. Wir beweisen gleich Punkt 3:

a) Es sei $a_0 = a_0' \cdot a_0''$ und die a_0', a_0'' teilerfremd. Wir denken uns die übrigen $a_i(t)$ in teilerfremde Faktoren zerlegt $a_i = a_i' \cdot a_i''$ derart, daß $a_i' | a_{i-1}'$, $a_i'' | a_{i-1}''$. In der Reihe der a_i' oder a_i'' können unter Umständen von einem gewissen ab lauter 1 vorkommen. Sei

$$\mathfrak{a}' = (a_0', a_1' f_1^*, a_2' f_2^*, \ldots),$$
$$\mathfrak{a}'' = (a_0'', a_1'' f_1^*, a_2'' f_2^*, \ldots);$$

dann ist

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}' \cap \mathfrak{a}'' \quad \text{und} \quad (\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'') = (1).$$

War $b_0(x)$ ein Produkt von teilerfremden Faktoren, so arbeiten wir mit einer ausgezeichneten Idealbasis, in der t und x ihre Rollen vertauscht haben, genau so wie oben.

b) Sei andererseits $\mathfrak{q}$ ein S-I., bei dem $a_0(t)$ und $b_0(x)$ Potenzen irreduzibler Polynome $a^n(t)$ und $b^m(x)$ sind.

Ist $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2$, so muß notwendig $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ von der gleichen Art sein wie $\mathfrak{q}$, das heißt, ihre $a_0(t)$ und $b_0(x)$ sind Potenzen derselben irreduziblen Polynome $a(t)$ und $b(x)$ wie jene von $\mathfrak{q}$. Zwei derartige Ideale haben aber das von (1) verschiedene S-Ideal $\mathfrak{p} = (a(t), b(x))$ als gemeinsamen Teiler.

Die Beziehung zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ ist nämlich die folgende:

1) $\mathfrak{p} = (a(t), b(x))$ ist ein nulldimensionales, daher teilerloses Primideal,

2) $\mathfrak{q}$ ist ein einartiges, daher Primärideal, das zum Primideal $\mathfrak{p}$ gehört.

Aus den Hilfssätzen folgt:

4. Satz. *Jedes S-Ideal läßt sich eindeutig als Durchschnitt (Produkt) von teilerfremden einartigen Primär-S-Idealen darstellen. Diese können nicht weiter als Durchschnitt teilerfremder Ideale dargestellt werden.*

5. Satz. *Die Polynome* f_i^* *der ausgezeichneten Basis eines einartigen S-Ideals erfüllen die Bedingungen:*

(17) $$f_i^* \equiv 0 \ (\mathfrak{p}), \quad \text{wenn } a_i \neq a_0,$$

(18) $$q(x,t) \cdot f_i^* \equiv b^m(x) \pmod{a(t)}, \quad \text{wenn } a_i \neq a_{i-1},$$

mit einem gewissen $q(x,t)$ *und ganzzahligem* m.

Beweis. a) Da $a_i f_i^* \equiv 0 \,(\mathfrak{q})$ und $a_i \not\equiv a_0$, also

$$a_i \not\equiv 0 \,(\mathfrak{q}),$$

folgt:

$$f_i^* \equiv 0 \,(\mathfrak{p}).$$

b) Das Ideal $\mathfrak{q}_i^* = \left(f_i^*, \frac{f_{i-1}}{a_i}, \frac{f_{i-2}}{a_i}, \cdots \frac{a_0}{a_i}\right)$ ist wegen $a_0 \not\equiv a_i$ ein S-Ideal
nach (17) hat es den Teiler $\mathfrak{p}$. Hätte es noch einen anderen Primidealteiler $\mathfrak{p}'$
so wäre nach (11)

$$f_{i+1}^* \equiv 0 \,(\mathfrak{p}'),$$

daher

$$\mathfrak{q}_{i+1}^* = \left(f_{i+1}^*, \frac{a_i}{a_{i+1}} \cdot f_i^*, \frac{a_i}{a_{i+1}} \cdot \frac{f_{i-1}}{a_i}, \cdots \frac{a_i}{a_{i+1}} \cdot \frac{a_0}{a_i}\right) \equiv 0 \,(\mathfrak{p}').$$

Daraus würde wieder folgen:

$$f_{i+2}^* \equiv 0 \,(\mathfrak{p}') \text{ usw.}$$

und schließlich

$$\mathfrak{q} \equiv 0 \,(\mathfrak{p}')$$

im Widerspruch zur Einartigkeit von $\mathfrak{q}$. Daher ist auch $\mathfrak{q}_i^*$ einartig, also
Primärideal zum Primideal $\mathfrak{p}$ und daher Teiler einer Potenz $\mathfrak{p}^m$, wobei m
so hoch gewählt werden kann, daß der Grad von $b^m(x)$ größer wird als i.
Dann folgt nach Gleichung (6) die behauptete Bedingung.

Zusatz. Die Bedingung (18) des Satzes 5 ist im Falle eines abgeschlossenen Körpers $\mathfrak{K}$ besonders leicht zu übersehen: Es ist

$$a(t) = t - \alpha,$$
$$b(x) = x - \beta,$$

und die Bedingung (18) liefert die Gleichung

$$f_i^*(t, x) = (x - \beta)^i + (t - \alpha)^{k_i} \cdot g_i(t, x), \tag{18'}$$

wo $k_i \not\equiv 0$ und $g_i(t, x)$ in x höchstens vom Grade $i - 1$ ist.

6. Satz. *Aus* $f(t, x) \equiv 0 \,(\mathfrak{a})$ *folgt*

$$f(t, \mathsf{B}) = 0 \tag{19}$$

im Sinne der S-Gleichheit.

Beweis. Wir verbinden in bekannter Weise mit der Matrix B eine lineare Abbildung eines Vektorraumes von s Dimensionen auf sich selbst vermöge der Gleichungen

$$\mathsf{B} \cdot (r)_i = \sum_{j=0}^{s-1} g_{ij}(t) \cdot (r)_j \qquad i = 0, 1, \ldots, s - 1 \tag{20}$$

Dem Sinne der S-Gleichheit werden wir gerecht durch die Setzung $a_j(t) \cdot (r)_j = 0$. (Eine Realisierung eines derartigen „Vektorraumes" siehe in § 2.) Es gilt dann für jedes $l = 0, 1, \ldots, s-1$:

$$a_l(t) \cdot (r)_j = 0 \qquad (j = l, l+1, \ldots s-1)$$

daher auch

$$a_l(t) \cdot f_l^*(t, \mathsf{B}) \cdot (r)_j = 0 \qquad (j = l, l+1, \ldots s-1). \tag{21}$$

Aus Gleichung (20) folgt:

$$\mathsf{B} \cdot a_l(t) \cdot (r)_i = \sum_{j=0}^{l-1} g_{ij}(t) \cdot a_l(t) \cdot (r)_j \quad (i = 0, \ldots l-1).$$

Behandeln wir dieses Gleichungssystem rein formal wie ein System von l linearen Gleichungen in den l Unbekannten $(r)_i$ $(i = 0, 1, \ldots, l-1)$, so erhalten wir

$$f_l^*(t, \mathsf{B}) \cdot a_l(t) \cdot (r)_i = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots l-1). \tag{22}$$

Aus (21) und (22) folgt die S-Gleichheit (19) für alle Polynome der ausgezeichneten Basis von $\mathfrak{a}$, somit gilt sie für alle Polynome von $\mathfrak{a}$.

7. Satz. *Das Ideal* $\mathfrak{m}$ *aller Polynome* $f(t, x)$, *welche die Gleichung* (19) *erfüllen, ist eine Klasseninvariante; wir nennen es das Minimalideal der Klasse.*

Beweis. Aus $f(t, \mathsf{B}) = 0$ folgt $f(t, \mathsf{T}^{-1}\mathsf{B}\mathsf{T}) = \mathsf{T}^{-1} f(t, \mathsf{B})\,\mathsf{T} = 0$ und umgekehrt.

Zusatz. Daß $\mathfrak{m}$ nicht auch Ordnungsinvariante ist, zeigen z. B. die beiden zur Polynomreihe

$$a_0(t) = t^2, \quad a_1(t) = t$$

gehörigen Sh. M.

$$\mathsf{B}_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad \mathsf{B}_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

die zur gleichen Ordnung mit dem charakteristischen Ideal $\mathfrak{a} = (t^2, tx, x^2)$ gehören, während die Minimalideale ihrer Klassen

$$\mathfrak{m}_1 = (t^2, tx, x^2)$$

und

$$\mathfrak{m}_2 = (t^2, x)$$

sind. Aus Satz 6 folgt:

8. Satz. *Das Minimalideal einer Klasse ist Teiler des charakteristischen Ideals*: $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$.

§ 2.

Elementarteilergruppen zweiter Art und Polynome in einer Matrix.

Unter einer Elementarteilergruppe zweiter Art (ETG 2. A) wollen wir — in Erweiterung der KRULLschen Begriffsbildung (siehe a. a. O.) — einen $\mathfrak{R}$-Modul $\mathfrak{A}$ vom Range n verstehen, der einen von zwei miteinander und den Elementen von $\mathfrak{R}$ vertauschbaren, in $\mathfrak{R}$ nicht enthaltenen Operatoren A, B erzeugten Ring $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}[A, B]$ als Operatorenbereich zuläßt.

Sehen wir von der Wirkung des Operators B ab, betrachten also den Ring $\mathfrak{R}_A = \mathfrak{R}[A]$ als Operatorenbereich, so geht $\mathfrak{A}$ in eine Elementarteilergruppe im KRULLschen Sinne $\mathfrak{A}_A$ über, für die B die Rolle eines Automorphismus pielt.

$\mathfrak{A}_A$ läßt sich nach bekannten Sätzen als direkte Summe von zyklischen Elementarteilergruppen $\mathfrak{A}_A^{(0)}$, $\mathfrak{A}_A^{(1)}$, ... $\mathfrak{A}_A^{(s-1)}$ darstellen, deren annullierende Ideale Hauptideale

$$(3)' \qquad (a_0(t)),\ (a_1(t)),\ \ldots\ (a_{s-1}(t))$$

sind, wobei

$$a_i(t) \mid a_{i-1}(t).$$

Diese Zerlegung ist bis auf Isomorphie eindeutig. Wird $\mathfrak{A}_A^{(i)}$ von dem Element r_i erzeugt (das heißt: $\mathfrak{A}_A^{(i)}$ besteht aus allen Elementen der Form $f(A) \cdot r_i$, $f(t)$ ein Polynom aus $\mathfrak{R}[t]$), so gelten Gleichungen der Gestalt

$$(23) \qquad B \cdot r_i = \sum_{j=0}^{s-1} g_{ij}(A) \cdot r_j \qquad (i = 0, 1, \ldots, s-1),$$

wobei

$$g_{ij}(t) = \frac{a_j(t)}{a_i(t)} \cdot h_{ij}(t) \quad \text{für } j < i$$

(siehe K. SHODA, a. a. O.).

Durch (23) ist B (infolge der verlangten Vertauschbarkeit mit A) eindeutig bestimmt. Die Sh.M. $\mathsf{B} = (g_{ij})$ ist bis auf S-Gleichheit bestimmt und geht bei Anwendung eines holoedrischen Automorphismus T, der durch die Sh.M. T gemäß (23) bestimmt sei, in die ähnliche $\bar{\mathsf{B}} = \mathsf{T}^{-1}\mathsf{B}\mathsf{T}$ über.

Zu jeder ETG 2. A gehört demnach eine Klasse von Sh. M. und umgekehrt wir nennen sie die *charakteristische Klasse von* $\mathfrak{A}$, ihr charakteristisches und Minimalideal das *charakteristische und Minimalideal von* $\mathfrak{A}$.

Legen wir eine $\mathfrak{R}$-Basis von n linear unabhängigen Elementen zugrunde, so sind die Operatoren A und B durch zwei vertauschbare Matrizen vom Grade n dargestellt, die bei Übergang zu einer anderen Basis eine gleichzeitige Transformation (2) erleiden, also in ein Paar der gleichen Klasse übergehen. *Zu jeder ETG 2. A gehört demnach eine Klasse von Paaren von vertauschbaren quadratischen Matrizen und umgekehrt.*

Nach dem KRULLschen Fundamentalsatz über *verallgemeinerte endliche ABELsche Gruppen* (Mathem. Zeitschr. Bd. 23, 1925) läßt sich $\mathfrak{A}$ in bis auf Isomorphie eindeutiger Weise in eine direkte Summe von ETG 2. A zerlegen, die nicht weiter als direkte Summen von ETG 2. A dargestellt werden können; die charakteristischen Klassen, charakteristischen Ideale und Minimalideale der unzerlegbaren Summanden sind durch $\mathfrak{A}$ eindeutig bestimmt.

Da es also auf den Zerlegungsweg nicht ankommt, schlagen wir den folgenden ein: Wir zerlegen das Minimalideal $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{A}$ nach Satz 4 in ein Produkt von teilerfremden einartigen S-Idealen

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{q}_1 \cdot \mathfrak{q}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{q}_t. \tag{24}$$

Mit der multiplikativen Zerlegung (24) geht in bekannter Weise eine additive Zerlegung des Ringes $\mathfrak{R}$ in eine direkte Summe von Ringen $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots \mathfrak{R}_t$, die sich gegenseitig annullieren, einher (siehe z. B. L. B. VAN DER WAERDEN, Moderne Algebra II, § 85):

$$\begin{cases} \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \dotplus \mathfrak{R}_2 \dotplus \mathfrak{R}_3 \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{R}_t \\ \mathfrak{R}_i \cdot \mathfrak{R}_j = 0 \qquad (i \neq j). \end{cases} \tag{25}$$

Mit der Zerlegung (25) wiederum ist in bekannter Weise eine Zerlegung des Moduls $\mathfrak{A}$ in eine direkte Summe verbunden:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \dotplus \mathfrak{A}_2 \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{A}_t. \tag{26}$$

Die ETG 2. A $\mathfrak{A}_i$ haben dann zu Minimalidealen einartige, also Primär-S-Ideale.

Wir können also weiterhin voraussetzen, daß das Minimalideal der betrachteten ETG 2. A $\mathfrak{A}$ einartig sei, woraus folgt, daß die Polynome der Reihe (3′) Potenzen ein- nnd desselben irreduziblen Polynoms $a(t)$ sind.

Im folgenden betrachten wir *zyklische* ETG 2. A; das sind solche, deren Elemente r alle aus einem r_0 nach der Gleichung

$$r = f(A, B) \cdot r_0, \quad f(t, x) \text{ Polynom aus } \mathfrak{K}[t, x]$$

erzeugt werden.

G. KÖTHE hat gezeigt, daß eine bis auf Isomorphie eindeutige Zerlegung von $\mathfrak{A}$ in zyklische, direkt unzerlegbare Gruppen dann und nur dann existiert, wenn $\mathfrak{R}$ ein „einreihiger Ring“ ist, d. h. ein Ring, der direkte Summe von primären Idealen mit Haupteinheit ist, in denen jedes primitive Idempotent ein Ideal erzeugt, das nur eine einzige Kompositionsreihe besitzt [ABELsche Gruppen mit hyperkomplexem Operatorenring. (Math. Zeitschr. Bd. 39, 1934.) Wir machen im folgenden von diesem Satze keinen Gebrauch].

Für zyklische ETG 2. A gilt als Verschärfung des Satzes 8 der

9. Satz. *Das charakteristische Ideal und das Minimalideal einer zyklischen ETG 2. A stimmen überein.*

Beweis. Seien $\mathfrak{m}$ das Minimalideal von $\mathfrak{A}$ und $a_i(t) \cdot f_i^*(t, x)$, $(i = 0, \ldots, s-1)$ und $f_s^*(t, x)$ die Polynome einer ausgezeichneten Basis von $\mathfrak{m}$. Wir betrachten die Elemente

$$r_i = f_i^*(A, B) \cdot r_0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, s-1).$$

Sie erzeugen s elementenfremde Zyklen der ETG $\mathfrak{A}_A$, $\mathfrak{A}_A^{(i)}$ mit den annullierenden Idealen $(a_i(t))$, die der Bedingung (3′) genügen, und es ist

$$\mathfrak{A}_A = \mathfrak{A}_A^{(0)} \dotplus \mathfrak{A}_A^{(1)} \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{A}_A^{(s-1)}.$$

Die Gleichungen (23) in diesem r-System sind die Gleichungen (11) des Satzes 1 und die Sh.M. der ETG 2. A $\mathfrak{A}$ ist die Matrix (12a) des Satzes 1. Das Minimalideal und das charakteristische Ideal von $\mathfrak{A}$ werden also durch dieselbe Sh.M. (12a) bestimmt, sind daher identisch.

Des eben besprochenen Zusammenhanges wegen wollen wir Shodasche Matrizen der speziellen Form (12a) zyklische Sh.M. nennen.

Zusatz. Daß Satz 9 nicht umgekehrt werden kann, zeigt z. B. die zu dem bekannten Frobeniusschen Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad AB = BA = 0,$$

gehörige ETG 2. A, deren charakteristische Klasse die Klasse der zur Polynomreihe

$$a_0(t) = t^2, \quad a_1(t) = t$$

gehörigen Sh.M.

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}$$

ist, deren charakteristisches Ideal und Minimalideal

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{m} = (t^2, tx, x^2)$$

sind. Diese ETG 2. A ist direkt unzerlegbar, aber nicht zyklisch.

10. Satz. *Jedes beliebige S-Ideal* $\mathfrak{a}$ *kann charakteristisches Ideal (und zugleich Minimalideal) einer zyklischen ETG 2. A sein.*

Beweis. Man bilde eine ausgezeichnete Basis von $\mathfrak{a}$ nach Satz 1, bilde eine ETG $\mathfrak{A}_A$, deren direkte zyklische Summanden annullierende Ideale besitzen, die von den Polynomen $a_i(t)$ der Gleichung (10) des Satzes 1 erzeugt

werden und adjungiere zum Operatorenbereich $\mathfrak{R}_A$ den durch die zyklische Matrix (12a) des Satzes 1 nach (23) bestimmten Automorphismus B.

Zu den ETG 2. A, welche die Köthesche Bedingung erfüllen, gehören die beiden folgenden wichtigen Gruppen:

I) $B = f(A)$, $f(t)$ ein Polynom aus $\mathfrak{K}[t]$,

II) $A = g(B)$, $g(x)$ ein Polynom aus $\mathfrak{K}[x]$.

Die direkt unzerlegbaren zyklischen Summanden sind im ersten Falle die unzerlegbaren A-Zyklen von $\mathfrak{A}_A$, im zweiten Falle die unzerlegbaren B-Zyklen von $\mathfrak{A}_B$. Wir berechnen im folgenden das charakteristische und Minimalideal dieser ETG 2. A, wobei wir zunächst den Körper $\mathfrak{K}$ als *algebraisch abgeschlossen* voraussetzen:

I. Es sei $\mathfrak{A}$ ein unzerlegbarer A-Zyklus, $\left((t-\alpha)^{n_0}\right)$ sein annullierendes Ideal und $B = f(A)$. Ist

$$f_0(t) \equiv f(t) \pmod{(t-\alpha)^{n_0}}, \tag{27}$$

so ist offenbar

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{m} = \left((t-\alpha)^{n_0},\ x - f_0(t)\right).$$

Man sieht, daß $\mathfrak{m}$ tatsächlich den Bedingungen des Satzes 5 genügt: Es ist

$$\begin{aligned} x - f_0(t) &= x - f_0(\alpha) - [f_0(t) - f_0(\alpha)] \\ &= (x-\beta) - (t-\alpha)^k \cdot g_0(t) \qquad (\beta = f_0(\alpha) = f(\alpha)). \end{aligned}$$

Das zugehörige Primideal ist $\mathfrak{p} = \left((t-\alpha), (x-\beta)\right)$. Die zugehörige Sh.M. ist vom ersten Grade, besteht also aus dem einzigen Element $h_{00}(t) = f_0(t)$.

II. Es sei $\mathfrak{A}$ ein unzerlegbarer B-Zyklus, $\left((x-\beta)^m\right)$ sein annullierendes Ideal und $A = g(B)$. Wir setzen:

$$g(\beta) = \alpha, \quad A - \alpha = A', \quad B - \beta = B'.$$

Ferner sei

$$g(x) - g(\beta) = (x-\beta)^s \cdot g_0(t), \quad g_0(\beta) \neq 0. \tag{28}$$

Ist $s \geqq m$, so gilt $A = \alpha$; schließen wir diesen trivialen Fall aus, so können wir $s < m$ voraussetzen. Dann existiert ein Polynom $p(t)$ derart, daß

$$g_0(t) \cdot p(t) \equiv 1 \pmod{(x-\beta)^m}; \qquad p(\beta) \neq 0.$$

Aus (28) folgt

$$(x-\beta)^s \equiv [g(x) - \alpha] \cdot p(x) \pmod{(x-\beta)^m}. \tag{29}$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$(B')^s = A' \cdot p(B). \tag{30}$$

Setzen wir

$$p(x) = p_0 + p_1 \cdot (x-\beta) + \cdots + p_{s-1} \cdot (x-\beta)^{s-1} + (x-\beta)^s \cdot p_s(x),$$

so wird aus (30)

$$(31) \qquad (B')^s = A' \cdot [p_0 + p_1 \cdot B' + \cdots + p_{s-1} \cdot (B')^{s-1}] + \\ + A' \cdot (B')^s \cdot p_s(B); \quad p_0 \neq 0.$$

Im zweiten Gliede können wir für $(B')^s$ wieder (30) einsetzen, ein Glied mi dem Faktor $(B')^s$ abspalten und wieder (30) einsetzen usf.; da sich bei jeder Schritt die Potenz des Faktors A' bei $(B')^s$ immer um 1 erhöht, wird schließlic diese Potenz $(A')^n = 0$, sobald $n \cdot s \geqq m$, und wir erhalten:

$$(B')^s - A' [q_0(A') + q_1(A') \cdot B' + \cdots + q_{s-1}(A') \cdot (B')^{s-1}] = 0;$$

$$q_0(0) = p_0 \neq 0$$

Das auf diese Weise gewonnene Polynom

$$(32) \qquad f_s^*(x,t) = (x-\beta)^s - (t-\alpha) \cdot [q_0(t-\alpha) + \\ + q_1(t-\alpha) \cdot (x-\beta) + \cdots + q_{s-1}(t-\alpha) \cdot (x-\beta)^{s-1}]$$

ist das niedrigste in x des Minimalideals $\mathfrak{m}$, dessen höchster x-Koeffizient von unabhängig ist. Die übrigen Polynome der ausgezeichneten Basis von haben ersichtlich die Gestalt

$$(33) \qquad f_i(x,t) = (t-\alpha)^{n_i} \cdot (x-\beta)^i, \qquad i = 0, 1, \ldots, s-1$$

wo n_i durch die Bedingungen (34) eindeutig festgelegt ist:

$$(34) \qquad \frac{m-i}{s} \leqq n_i < \frac{m-i}{s} + 1.$$

Es sind wieder alle Bedingungen des Satzes 5 erfüllt. Das zugehörige Prim ideal ist wieder $\mathfrak{p} = ((t-\alpha), (x-\beta))$. Die zugehörige zyklische Sh.M. ha die Gestalt

$$\mathsf{B} = \begin{Bmatrix} \beta, & 1, & 0, & \cdots & 0 \\ 0, & \beta, & 1, & \cdots & 0 \\ 0, & 0, & \beta, & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & \cdots & 1 \\ (t-\alpha) \cdot q_0, & (t-\alpha) q_1, & (t-\alpha) \cdot q_2, & \cdots & (t-\alpha) q_{s-1} + \beta \end{Bmatrix}$$

Damit haben wir den folgenden Satz gewonnen:

1. Hauptsatz. *Ist* $\mathfrak{A}$ *eine direkt unzerlegbare zyklische ETG 2. A und* $B = f(A)$ *bzw.* $A = g(B)$, *so ist ihr charakteristisches und Minimalideal bei algebraisch abg.* $\mathfrak{K}$

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{m} = \big((t-\alpha)^{n_0},\ x - f_0(t)\big)$$

bzw.

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{m} = \big((t-\alpha)^{n^0},\ (t-\alpha)^{n_1}\cdot(x-\beta),$$
$$(t-\alpha)^{n_2}\cdot(x-\beta)^2,\ \ldots\ (t-\alpha)^{n_{s-1}}\cdot(x-\beta)^{s-1},\ f_s^*(x,t)\big)$$

mit den Bedingungen (27) *bis* (34).

Der 1. Hauptsatz läßt nun eine weitgehende Umkehrung zu:

2. Hauptsatz. *Sei* $\mathfrak{A}$ *eine ETG 2. A, von der weder vorausgesetzt wird, daß sie zyklisch, noch daß sie unzerlegbar sei. Enthält ihr charakteristisches Ideal* $\mathfrak{a}$ *ein Polynom* $(t-\alpha)^{n_0}$ *und ein Polynom* $x - f_0(t)$ *bzw. ein Polynom* $(t-\alpha)^{n_0}$ *und ein Polynom*

$$f_s^*(x,t) = (x-\beta)^s - (t-\alpha)\cdot F(x,t),\quad F(\beta,\alpha) \neq 0,$$

so ist $B = f(A)$ *bzw.* $A = g(B)$ *mit den Bedingungen* (27), (28), (32), *und* $\mathfrak{A}$ *genügt der* Köthe*schen Bedingung, d. h. sie ist zyklisch oder (bis auf Isomorphie eindeutig) Summe von direkt unzerlegbaren zyklischen Summanden.*

Beweis:

1) Aus Satz 6 folgt:

$$(A-\alpha)^{n_0} = 0$$
$$B - f_0(A) = 0,$$

daher auch

$$B = f(A).$$

2) Aus Satz 6 folgt zunächst:

$$(35)\qquad \begin{cases} (A-\alpha)^{n_0} = 0 \\ (B-\beta)^{s\cdot n_0} = (A-\alpha)^{n_0}\cdot F^{n_0}(B,A) = 0; \end{cases}$$

sodann mit $A - \alpha = A'$, $B - \beta = B'$:

$$(B')^s = A'\,[q_0(A') + q_1(A')\cdot B' + \cdots + q_{s-1}(A')\cdot(B')^{s-1}],$$
$$q_0(0) \neq 0,$$

also

$$(36)\qquad A'\cdot q_0(A') = (B')^s + A'\cdot B'\cdot[q_1(A') + \cdots + q_{s-1}(A')\cdot(B')^{s-2}].$$

Bestimmen wir das Polynom $g_1(t)$ derart, daß

$$g_1(t-\alpha)\cdot q_0(t-\alpha) \equiv 1 \pmod{(t-\alpha)^{n_0}},\quad g_1(0) \neq 0,$$

so gewinnen wir aus (36)

$$A' = (B')^s \cdot g_1(A') + A' \cdot B' \cdot [q_1(A')\, g_1(A') + \cdots + q_{s-1}(A') \cdot \cdot g_1(A') \cdot (B')^{s-2}]. \tag{37}$$

Setzen wir hierin für A' wieder (37) ein usf., so erhalten wir nach endlich vie Schritten wegen (35) schließlich

$$A' = (B')^s \cdot g_0(B'), \quad g_0(0) \neq 0,$$

also

$$A = \alpha + (B - \beta)^s \cdot g_0(B - \beta),$$
$$A = g(B).$$

Alles weitere folgt unmittelbar aus dem vorhergehenden.

Nebenbei gewannen wir beim Beweise des 1. Hauptsatzes den für viel Untersuchungen über Polynome in einer Matrix recht brauchbaren

Elementarteilersatz. *Ist* $A = g(B)$ *mit Bedingung* (28), *so gibt e zu jedem Elementarteiler* $(x - \beta)^m$ *von* B *die Elementarteiler*

$$(t - \alpha)^{n_i} \qquad (i = 0, 1, \ldots, s - 1$$

von A *mit Bedingung* (34) und $\alpha = g(\beta)$.

Im Falle eines Körpers $\mathfrak{K}$, der *nicht* algebraisch abgeschlossen ist, ver ursacht der entsprechende Elementarteilersatz etwas mehr Mühe. Ich ver weise auf meine Arbeit über *die Elementarteiler eines Polynoms in einer Matrix* Danach gestalten sich die Fälle I und II folgendermaßen:

I. Das anullierende Ideal des unzerlegbaren A-Zyklus ist $(a^n(t))$ mit einer irreduziblen Polynom $a(t)$. Es gibt ein eindeutig bestimmtes irreduzible Polynom $b(x)$ derart, daß

$$b(f(t)) \equiv 0 \pmod{a(t)}.$$

Das Primideal der Gruppe ist

$$\mathfrak{p} = (a(t), \quad b(x)),$$

das charakteristische und Minimalideal

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{m} = (a^n(t), \quad x - f(t)).$$

II. Das annullierende Ideal des unzerlegbaren B-Zyklus ist $b^m(x)$ mi einem irreduziblen Polynom $b(x)$. Es gibt ein eindeutig bestimmtes irre duzibles Polynom $a(t)$ derart, daß

$$a(g(x)) \equiv 0 \pmod{b(x)};$$

es sei

$$a(g(x)) = b^s(x) \cdot q(x), \tag{28'}$$

(x) nicht weiter durch $b(x)$ teilbar. s^* sei die kleinere der beiden Zahlen s und m. Der Grad N_1 von $a(t)$ ist Teiler des Grades N von $b(x)$, $\frac{N}{N_1} = M$. Es gibt dann ein Polynom M-ten Grades in x

$$f_M^*(x,t) = x^M + v_0(t) \cdot x^{M-1} + \cdots + v_{M-1}(t)$$

so, daß $f_M^*(x, g(x))$ durch $b(x)$, aber durch keine höhere Potenz von $b(x)$ teilbar ist; ein Polynom niedrigeren Grades mit t-freiem höchsten Koeffizienten von dieser Eigenschaft existiert nicht.

Außerdem gibt es ein Polynom vom Grade $M \cdot s^*$ in x mit dem höchsten Koeffizienten 1, $f_{M\cdot s^*}^*(t,x)$, so, daß $f_{M\cdot s^*}^*(g(x), x)$ teilbar ist durch $b^m(x)$. Setzen wir

$$f_{M\cdot i+k}^*(t,x) = x^k \cdot [f_M^*(x,t)]^i \qquad \begin{cases} k = 0, 1, \ldots m-1, \\ i = 0, 1, \ldots, s^*-1, \end{cases}$$

und bestimmen n_i aus der Bedingung (34′)

(34′) $$\frac{m-i}{s^*} \leqq n_i < \frac{m-i}{s^*} + 1,$$

so ist

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{m} = (a^{n_0}(t),\ a^{n_1}(t) \cdot f_1^*, \ldots a^{n_{M\cdot s^*-1}}(t) \cdot f_{M\cdot s^*-1}^*,\ f_{M\cdot s^*}^*)$$
$$\mathfrak{p} = (a(t),\ b(x)).$$

Auch die zugehörige Sh.M. kann leicht angegeben werden.

Die Umkehrung gelingt im Falle I mühelos, und Fall II kann durch Vertauschung der Rollen der beiden Operatoren A und B immer auf den Fall I zurückgeführt werden.

Einer weiteren Mitteilung bleibe die Aufgabe der Charakterisierung ähnlicher Shodascher Matrizen und der unzerlegbaren Elementarteilergruppen zweiter Art vorbehalten, was erst einen endgültigen Abschluß der hier behandelten Frage ermöglicht.

(Eingegangen am 27. Dezember 1942.)

Zur Theorie der C- und H-Summierbarkeit negativer Ordnung.

Von

Gerhard Lyra in Göttingen.

Einleitung.

Der Begriff der CESÀROschen Limitierbarkeit einer Zahlenfolge s_n zum Werte s ist ursprünglich von E. CESÀRO[1]) 1889 nur für positiv-ganzzahlige Limitierungsordnung r durch die Konvergenz der Mittel

$$(1) \qquad C_r(s_n) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu+r-1}{n-\nu} s_\nu \Big/ \binom{n+r}{n} \to s$$

erklärt worden. K. KNOPP[2]) hat 1907 diese Definition auf nicht-ganzzahlige $r > -1$ erweitert und damit erstmalig den Begriff der C-Limitierbarkeit beliebig reeller Ordnung $r > -1$ eingeführt. Wie KNOPP a. a. O. gezeigt hat, bleiben bei dieser Verallgemeinerung alle bekannten Eigenschaften des C-Verfahrens erhalten[3]).

Nun sind durch (1) die CESÀROschen Mittel auch noch für alle nicht-ganzzahligen $r < -1$ definiert. Trotzdem kann der Begriff der C-Limitierbarkeit für diese Ordnungen nicht allein durch die Konvergenz der CESÀROschen Mittel (1) erklärt werden, da sonst nicht einmal die Permanenzbedingung, d. h. die Forderung, daß aus der C_r-Limitierbarkeit einer Folge zum Werte s für $r' > r$ ihre $C_{r'}$-Limitierbarkeit zum gleichen Werte folgt, erfüllt wäre. In der Tat gibt es zu jedem beliebigen nicht-ganzzahligen $r < -1$ Zahlenfolgen s_n, welche C_r-limitierbar und doch nicht konvergent sind, im Widerspruch zu dieser Permanenzforderung. Z. B. hat die Zahlenfolge

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu-r-1}{n-\nu} \Big/ \binom{\nu-r}{\nu},$$

wie man mit Hilfe der erzeugenden Funktion leicht erkennt, die CESÀROschen Mittel $C_r(s_n) = 1 \Big/ \binom{n-r}{n} \binom{n+r}{n}$, welche für $n \to \infty$ gegen $\Gamma(1-r)\,\Gamma(1+r$

[1]) E. CESÀRO, Sur la multiplication des séries. Bull. des sciences math. (2) 14 (1890), S. 119.

[2]) K. KNOPP, Grenzwerte von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze. Inauguraldissertation, Berlin 1907, ferner: Multiplikation divergenter Reihen. Sitzungsber. d. Berliner Mathematischen Gesellschaft, Jahrgang 7 (1907), S. 1—12.

[3]) Unabhängig von KNOPP hat später S. CHAPMAN in der in Fußnote 4 genannten Arbeit die C-Limitierbarkeit nicht-ganzzahliger Ordnung $r > -1$ untersucht.

$= r\pi/\sin r\pi$ konvergieren. Andererseits ist $s_n \geqq \binom{n-r-1}{n}$, die Folge s_n also gewiß nicht konvergent. Um solche Fälle auszuschließen, muß in der Definition der C-Limitierbarkeit nicht-ganzzahliger Ordnung $r < -1$ zur Konvergenz der Cesàroschen Mittel (1) noch eine weitere Forderung hinzukommen. Als geeignete Zusatzforderung hat zuerst S. Chapman [4]) 1910 die A-Beschränktheit der Folge s_n, d. h. die Beschränktheit von $(1-x)\sum_0^\infty s_n x^n$ für $0 \leqq x < 1$ gefordert und gezeigt, daß unter dieser Voraussetzung alle wesentlichen Eigenschaften des Cesàroschen Limitierungsverfahrens gültig bleiben. Damit war der Begriff der C-Limitierbarkeit für reelle Ordnung $r \neq -1, -2, \ldots$ erklärt [5]). Wegen des für ihn gültigen Permanenzsatzes folgt insbesondere aus der Konvergenz der Cesàroschen Mittel $C_r(s_n)$ nichtganzzahliger Ordnung $r < -1$ und der A-Beschränktheit der s_n die Konvergenz der Folge s_n zum selben Wert.

Um schließlich den Begriff der C-Limitierbarkeit auf den allgemeinen Fall beliebig reeller Ordnung r zu verallgemeinern, bedarf es noch einer Definition der C-Limitierbarkeit negativ-ganzzahliger Ordnung $r = -k$ ($k > 0$ ganz). Zunächst erscheint für diesen Zweck der Ausdruck (1) unbrauchbar, da er wegen des für negativ-ganzzahlige r verschwindenden Nenners $\binom{n+r}{n}$ nicht definiert ist. Im Gegensatz hierzu kann die Definition der Hölderschen Limitierbarkeit bekanntlich ohne weiteres auf negativ-ganzzahlige Ordnung ausgedehnt werden, wie schon 1916 W. H. Young [6]) für die Ordnung -1 bemerkt hat. Denn der Übergang von den Hölderschen Mitteln $H_k(s_n)$ der positiv-ganzzahligen Ordnung k zu denjenigen der Ordnung $k-1$ wird durch die zur arithmetischen Mittelbildung inversen Operation $H_{-1}(H_k(s_n))$ $= (n+1)H_k(s_n) - nH_k(s_{n-1}) = H_{k-1}(s_n)$ vermittelt, so daß die Hölderschen Mittel negativ-ganzzahliger Ordnung $-k$ einer Zahlenfolge s_n rekursiv durch die Ausdrücke

$$H_{-k}(s_n) = (n+1)H_{1-k}(s_n) - nH_{1-k}(s_{n-1}) \to s \tag{2}$$

$$\text{mit } k = 1, 2, 3, \ldots \text{ und } H_0(s_n) = s_n$$

---

[4]) S. Chapman, On non-integral orders of summability of series and integrals. Proc. of the London Math. Soc. (2) **9** (1911), S. 369—409.

[5]) Allerdings hat Chapman unter C-Limitierbarkeit nicht-ganzzahliger Ordnung < -1 doch nur die Konvergenz der Cesàroschen Mittel verstanden und die A-Beschränktheit als eine zusätzliche Bedingung aufgefaßt. Unabhängig von Chapman hat F. Hausdorff in der in Fußnote 11 genannten Arbeit dieselbe Zusatzbedingung angegeben und zum ersten Male ausdrücklich in die Definition der C-Limitierbarkeit mit einbezogen.

[6]) W. H. Young, On the convergence of the derived series of Fourier series. Proc. of the London Math. Soc. (2) **17** (1918), S. 210.

zu erklären sind, aus denen man entnimmt, daß $H_{-k}(s_n)$ die zu $H_k(s_n)$ inverse Transformation der Folge s_n ist. Der auf Grund von (2) erklärte Begriff der H-Limitierbarkeit negativ-ganzzahliger Ordnung genügt trivialerweise der Permanenzforderung. HAUSDORFF[7]) hat 1921 diese Definition der HÖLDERschen Mittel und der H-Limitierbarkeit auf beliebig reelle Ordnung verallgemeinert.

In einer Untersuchung des Zusammenhangs einiger Reihensätze hat der Verfasser 1940[8]) den folgenden Satz mitgeteilt, dessen Beweis erstmalig in der vorliegenden Untersuchung erbracht wird:

Es ist $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \Delta^k a_n = s$ *dann und nur dann, wenn ein Polynom* P_n *höchstens* $(k-1)$*-ten Grades in* n *existiert, so daß* $\sum_0^\infty (a_n - P_n) = s$ *und* $\Delta^{k-1}(a_n - P_n) = o(n^{-k})$ *ist.*

Aus einem Vergleich dieses Satzes mit dem folgenden Satz von A. F. ANDERSEN[9]):

Es ist $C_{r+k}\text{-}\sum_{u=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \Delta^k a_n = s$ *dann und nur dann, wenn ein Polynom* P_n *höchstens* $(k-1)$*-ten Grades in* n *existiert, so daß* $C_r\text{-}\sum_0^\infty (a_n - P_n) = s$ *ist,* hat der Verfasser a. a. O. die folgende Definition für den Begriff der C-Summierbarkeit negativ-ganzzahliger Ordnung $-k$ entnommen: Eine Reihe $\sum_0^\infty a_n$ heißt C_{-k}-summierbar zur Summe s, wenn $\sum_0^\infty a_n = s$ konvergent und $\Delta^{k-1} a_n = o(n^{-k})$ ist[10]). Andererseits wird durch die Tatsache, daß der durch (2) erklärte Ausdruck $H_{-k}(s_n)$ die zur HÖLDERschen Mittelbildung $H_k(s_n)$ inverse Transformation darstellt, nahegelegt, die C_{-k}-Limitierbarkeit einer Folge s_n durch die Konvergenz der zur CESÀROschen Mittelbildung $C_k(s_n)$ inversen Bildung $C_k^{-1}(s_n) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu-k-1}{n-\nu} \binom{\nu+k}{k} s_\nu = \Delta^k \left[\binom{n+k}{k} s_n \right] \to$

[7]) F. HAUSDORFF, Summationsmethoden und Momentfolgen I. Math. Zeitschr. (1921), S. 83.

[8]) G. LYRA, Über den Zusammenhang einiger Reihensätze. Math. Zeitschr. 4 (1940), S. 633f.

[9]) A. F. ANDERSEN, Comparison theorems in the theory of CESÀRO summability Proc. of the London Math. Soc. (2) 27 (1927), S. 44. In der in Fußnote 8 zitierte Arbeit des Verf. wird a. a. O., S. 630ff. der genannte Satz unabhängig von ANDERSE aus einem älteren Satz des Verf. gefolgert. Vgl. daselbst den Zusatz bei der Korrektu

[10]) Für $k = 1$ erhält man eine Definition der C_{-1}-Summierbarkeit, welche scho seit der in Fußnote 6 genannten Arbeit von W. H. YOUNG aus dem Jahre 1916 vo allem durch G. H. HARDY gebräuchlich geworden ist, und offenbar mit der durch d Konvergenz $H_{-1}(s_n) = s_n + n a_n \to s$ definierten H_{-1}-Summierbarkeit äquivalent is

zu definieren. (Wegen der Bedeutung der Differenzensymbole Δ und $\triangle$ s. u. I, 3.) Beide Erklärungen erweisen sich als äquivalent mit der folgenden schon 1929 von F. Hausdorff [11]) gegebenen Definition der C-Limitierbarkeit negativ-ganzzahliger Ordnung.

Zunächst war für nicht-ganzzahlige Limitierungsordnung $r < -1$ nach Chapman die C-Limitierbarkeit einer Folge s_n durch die Konvergenz der Cesàroschen Mittel (1) und die A-Beschränktheit dieser Folge s_n definiert. Hausdorff schreibt nun die erste dieser beiden Forderungen in der Form

$$\frac{n!}{\Gamma(n+r+1)} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu+r-1}{n-\nu} s_\nu \to \frac{s}{\Gamma(r+1)}, \tag{3}$$

wodurch die linke Seite dieser Grenzwertbeziehung auch noch für negativ-ganzzahliges $r = -k$ und $n \geqq k$ definiert ist. Die rechte Seite aber strebt für $r \to -k$ ($k > 0$ ganz) gegen Null, weshalb Hausdorff die Forderung (3) im Fall negativ-ganzzahliger Ordnung $r = -k$ durch

$$\frac{n!}{(n-k)!} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu-k-1}{n-\nu} s_\nu \to 0 \tag{4}$$

ersetzt. Als Zusatzforderung reicht aber die A-Beschränktheit der s_n nicht mehr aus, da dann die Permanenzbedingung nicht erfüllt wäre. Z. B. braucht eine Reihe Σa_n nicht zu konvergieren, wenn ihre Teilsummen s_n beschränkt sind und $n a_n \to 0$ strebt, wie leicht aus Gegenbeispielen ersichtlich ist; die Teilsummen einer solchen Reihe sind aber erst recht A-beschränkt und erfüllen die Bedingung (4) für $k = 1$. Daher wählt Hausdorff als zusätzliche Forderung die A-Limitierbarkeit der Folge s_n, d. h. die Existenz des $\lim (1-x) \sum_0^\infty s_n x^n = s$ für $x \to 1-0$. Hausdorff definiert also die C_{-k}-Limitierbarkeit der Folge s_n zum Werte s durch (4) und $A\text{-}\lim s_n = s$. Wegen der nunmehr bestehenden Permanenzeigenschaft [11a]) der so erklärten C_{-k}-Limitierbarkeit folgt insbesondere die Konvergenz der Folge $s_n \to s$. Also ist Hausdorffs Erklärung gleichbedeutend damit, daß

$$\frac{n!}{(n-k)!} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu-k-1}{n-\nu} s_\nu \to 0 \quad \text{und} \quad s_n \to s \tag{5}$$

konvergiert. Hierin ist die Zusatzforderung $s_n \to s$ zwar wesentlich enger als diejenige Hausdorffs. Da aber beide Forderungen (5) zusammen gleichwertig

[11]) F. Hausdorff, Die Äquivalenz der Hölderschen und Cesàroschen Grenzwerte negativer Ordnung. Math. Zeitschr. **31** (1930), S. 186—196. Diese Arbeit ist dem Verf. erst nach Abschluß der vorliegenden Untersuchung durch freundlichen Hinweis von Herrn Prof. K. Knopp zur Kenntnis gekommen.

[11a]) Vgl. Hausdorff, a. a. O., S. 193, Satz V.

mit denjenigen Hausdorffs und einfacher als diese sind, so definieren wir die C-Limitierbarkeit negativ-ganzzahliger Ordnung $-k$ durch (5) als eine Verstärkung der Konvergenz, indem wir nicht die zweite der beiden Forderungen (5), sondern die erste als die Zusatzforderung auffassen. Diese ist wegen $\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu-k-1}{n-\nu} s_\nu = \triangle^k s_n$ und $\frac{n!}{(n-k)!} \cong n^k$ gleichbedeutend mit $\triangle^k s_n = o(n^{-k})$, so daß schließlich die C_{-k}-Limitierbarkeit der Folge s_n zum Werte s durch

$$(6) \qquad s_n \to s \quad \text{und} \quad \triangle^k s_n = o(n^{-k})$$

definiert ist [12]). Die oben gegebene Erklärung des Verf. ist also in der Tat mit derjenigen Hausdorffs äquivalent. Hausdorff hat a. a. O. unabhängig von Chapman auch die C-Limitierbarkeit nicht-ganzzahliger negativer Ordnung erklärt und bereits gezeigt, daß der Knopp-Schneesche Äquivalenzsatz auch für beliebig negative Limitierungsordnung gültig ist. Weil der Beweis dieses Äquivalenzsatzes für negativ-ganzzahlige Ordnung unter Zugrundelegung der Definition (6) des C_{-k}-lim s_n besonders einfach wird, ist er in der folgenden Untersuchung mit aufgenommen worden, in welcher wir uns auch sonst auf ganzzahlige Summationsordnung beschränken. Doch gelten die wesentlichen Ergebnisse mutatis mutandis auch für beliebig reelle Ordnung.

Da eine Reihe, welche C-summierbar negativer Ordnung ist, stets konvergiert, so handelt es sich bei der Ausdehnung des Begriffs der C-Summierbarkeit auf negative Ordnung nicht eigentlich um ein „Summierungsverfahren", sondern um eine Verallgemeinerung des Summationsbegriffs, die einen besseren Einblick in die Natur der Konvergenz gewährt, als das bei Beschränkung auf die C-Summierbarkeit positiver Ordnung möglich ist. Es lassen sich nämlich nicht nur bekannte Sätze über C- und H-summierbare Reihen auf beliebig ganzzahlige Summationsordnung verallgemeinern, sondern es werden auch solche Sätze der klassischen Reihenlehre, welche unter Beschränkung auf positive Summierbarkeitsordnung kein Analogon in der Theorie der C- und H-summierbaren Reihen haben konnten, sich nunmehr auf C- und H-summierbare Reihen verallgemeinern lassen. Vor allem aber soll an Beispielen gezeigt werden, daß sich manche Reihensätze unter Verwendung des Begriffs der C_{-k}-Summierbarkeit wesentlich einfacher und durchsichtiger formulieren lassen, und daß sich zuweilen zwei ganz verschiedene Sätze aus der Theorie der C-summierbaren Reihen als die beiden, der negativen und der positiven Summationsordnung entsprechenden Hälften

[12]) Zahlenfolgen mit der Eigenschaft (6) nennt A. F. Andersen „regulär von der Ordnung k"; vgl. die Berichte über Den sjette skandinaviske Matematikerkongres i København (1925), S. 458.

eines einzigen Satzes über C-summierbare Reihen beliebig ganzzahliger Ordnung erweisen. Damit trägt der Begriff der C-Summierbarkeit negativer Ordnung dazu bei, in der Theorie der C-summierbaren Reihen eine weitgehende Analogie zur Theorie der konvergenten Reihen herzustellen und neue Zusammenhänge zwischen bekannten Reihensätzen aufzufinden.

I. Die C_{-k}-Summierbarkeit und äquivalente Eigenschaften.

1. Wie bereits einleitend bemerkt, beschränken wir uns durchweg auf ganzzahlige Summationsordnung und legen der Betrachtung die folgende Form der Hausdorffschen Definition für die C-Summierbarkeit negativ ganzzahliger Ordnung $-k$ zugrunde: Eine Reihe $\sum_0^\infty a_n$ heißt C_{-k}-summierbar zur Summe s, wenn $\sum_0^\infty a_n = s$ konvergent und $\triangle^{k-1} a_n = o(n^{-k})$ ist. Aus dieser so erklärten C_{-k}-Summierbarkeit ersieht man leicht die Gültigkeit des Permanenzsatzes für negative Ordnung, wonach $C_{-k+1}\text{-}\sum_0^\infty a_n = s$ aus $C_{-k}\text{-}\sum_0^\infty a_n = s$ folgt; denn ist $k \geqq 2$ (für $k = 1$ ist der Satz trivial), dann folgt aus $\triangle^{k-1} a_n = o(n^{-k})$, daß

$$\triangle^{k-2} a_n = K' + \sum_{\nu=0}^{n} \triangle^{k-1} a_\nu = K' + \sum_{\nu=0}^{n} o(\nu^{-k}) = K + \sum_{\nu=n}^{\infty} o(\nu^{-k})$$
$$= K + o(n^{-k+1});$$

wegen der Konvergenz von $\sum_0^\infty a_n$ strebt $\triangle^{k-2} a_n \to 0$, so daß $K = 0$ sein muß. Auch die Erweiterungsbedingung ist erfüllt, da für jedes ganzzahlige k die Reihe $\sum_0^\infty (-1)^n (n+1)^{-k}$ C_{-k+1}-summierbar ist, nicht aber C_{-k}-summierbar, wie aus der leicht zu verifizierenden Abschätzung

$$(1) \quad n^{k-1} \triangle^{k-2} \frac{(-1)^n}{n^k} = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{und} \quad n^k \triangle^{k-1} \frac{(-1)^n}{n^k} = 2^{k-1}(-1)^n + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

hervorgeht. Für die C_{-k}- und H_{-k}-Summierbarkeit als verstärkte Konvergenz gilt trivialerweise auch die Verträglichkeitsbedingung.

Hausdorff hat die Gültigkeit des Knopp-Schneeschen Äquivalenzsatzes für beliebig negative Summationsordnung nachgewiesen. Bei Beschränkung auf negativ-ganzzahlige Summationsordnung läßt sich der Beweis des Äquivalenzsatzes sehr einfach und in vollkommener Analogie zu demjenigen[13])

[13]) Vgl. K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 3. Aufl., Berlin 1931, S. 499ff.

von I. Schur und A. F. Andersen für positiv-ganzzahlige Ordnung führen. Wir beweisen zunächst die beiden folgenden Identitäten für $k \geqq 1$:

$$(2)\quad -k\binom{n}{k}\Delta^k s_n + \binom{n}{k-1}\Delta^{k-1}(s_n + n a_n) = k\binom{n}{k-1}\Delta^{k-1} s_n,$$

$$(3)\quad -k\binom{n}{k}\Delta^k s_n + \binom{n}{k-1}\Delta^{k-1}(s_n + n a_n) = k\frac{\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\nu}{k-1}\Delta^{k-1}(s_\nu + \nu a_\nu)}{n+1}.$$

Die Beziehung (2) geht aus der Identität

$$(4)\qquad -(n-k+1)\Delta^k s_n + \Delta^{k-1}(s_n + n a_n) = k\Delta^{k-1} s_n$$

durch Multiplikation mit $\binom{n}{k-1}$ hervor. (4) ist für $k = 1$ richtig; aus dem Bestehen der Identität (4) für ein bestimmtes $k \geqq 1$ folgt ihre Richtigkeit für $k+1$ statt k durch einmalige Ausübung der Differenzenbildung auf (4) und nachfolgende Addition von $\Delta^k s_n$ auf beiden Seiten. Zum Beweise von (3) setze man in (4) $\Delta^k s_n = \Delta^{k-1} s_n - \Delta^{k-1} s_{n-1}$ und erhält

$$-(n+1)\Delta^{k-1} s_n + (n-k+1)\Delta^{k-1} s_{n-1} + \Delta^{k-1}(s_n + n a_n) = 0.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\binom{n}{k-1}$, so wird

$$(n+1)\binom{n}{k-1}\Delta^{k-1} s_n - n\binom{n-1}{k-1}\Delta^{k-1} s_{n-1} = \binom{n}{k-1}\Delta^{k-1}(s_n + n a_n),$$

woraus durch Aufsummieren nach n und nachfolgende Division mit $n+1$ die Übereinstimmung der beiden rechten Seiten von (2) und (3) folgt, womit alles bewiesen ist.

Zunächst ergibt sich aus diesen beiden Beziehungen (2) und (3) fast unmittelbar der

Hilfssatz. *Ist die Folge s_n C_{-k}-limitierbar zum Werte s, so ist die Folge $H_{-1}(s_n) = s_n + n a_n$ erst C_{-k+1}-limitierbar zum selben Werte und umgekehrt.*

Denn strebt $s_n \to s$ und $n^k \Delta^k s_n \to 0$ und ist $k \geqq 2$ (für $k = 1$ ist der Hilfssatz trivial), so strebt nach dem Permanentsatz auch $n^{k-1}\Delta^{k-1} s_n \to 0$ und somit nach (2) auch $n^{k-1}\Delta^{k-1}(s_n + n a_n) \to 0$. Da $n \Delta s_n \to 0$ strebt zufolge der Permanenz und damit auch $s_n + n a_n \to s$, so ist $C_{-k+1}\text{-}\lim(s_n + n a_n) = s$. Strebt umgekehrt $s_n + n a_n \to s$ und $n^{k-1}\Delta^{k-1}(s_n + n a_n) \to 0$, dann bilden auch die arithmetischen Mittel der $n^{k-1}\Delta^{k-1}(s_n + n a_n)$ eine Nullfolge, so daß nach (3) $n^k \Delta^k s_n \to 0$ strebt. Da mit $s_n + n a_n \to s$ auch $s_n \to s$ strebt, so ist also $C_{-k}\text{-}\lim s_n = s$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Nun folgt aber aus diesem Hilfssatz eine jede der Beziehungen

$$C_{-k}(H_0(s_n)) \to s,\quad C_{-k+1}(H_{-1}(s_n)) \to s,\quad C_{-k+2}(H_{-2}(s_n)) \to s,\quad \ldots,$$
$$C_0(H_{-k}(s_n)) \to s$$

aus jeder der übrigen, insbesondere die erste aus der letzten Beziehung und umgekehrt. Das ist aber gerade der Äquivalenzsatz für $p = -k$.

Auch das Analogon zum KRONECKERschen Satz, daß bei einer C_p-summierbaren Reihe $\sum_0^\infty a_n$ notwendig $C_p\text{-}\lim \frac{1a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n+1} = 0$ sein muß, gilt jetzt auch für negativ-ganzzahlige Ordnung $p = -k$. Denn für $k = 1$ folgt aus $s_n \to s$ und $n^k \triangle^k s_n \to 0$ nach obigem Hilfssatz, daß $n^{k+1} \triangle^{k+1} \frac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1} \to 0$ und $\frac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1} \to s$ strebt und hieraus $n^k \triangle^k \frac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1} \to 0$ nach dem Permanenzsatz. Daher strebt auch

$$n^k \triangle^k s_n - n^k \triangle^k \frac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1} = n^k \triangle^k \frac{1a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n+1} \to 0$$

w. z. b. w.

Ein anderes Beispiel zur Ausdehnung der C-Summierbarkeit auf negativ-ganzzahlige Ordnung ist der Satz, wonach die DIRICHLETsche Reihe $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n/n^s$ für alle der Bedingung

$$-p < s \leqq -p + 1$$

genügenden Punkte s genau C_p-summierbar ist. Es besteht nähmlich die für alle ganzen $r \geqq 1$ gültige Abschätzung

$$n^r \triangle^{r-1} \frac{(-1)^n}{n^s} = \frac{2^{r-1}(-1)^n + O\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{s-r}}.$$

Denn die Gleichung $\triangle^{r-1} \frac{(-1)^n}{n^s} = 2^{r-1} \frac{(-1)^n}{n^s} + O\left(\frac{1}{n^{s+1}}\right)$ gilt für alle $r \geqq 1$, da sie für $r = 1$ richtig ist und durch einmalige Differenzenbildung ihre Richtigkeit für $r + 1$ statt r folgt. Multiplikation mit n^r ergibt die behauptete Abschätzung. Aus ihr folgt aber, daß $n^r \triangle^{r-1} \frac{(-1)^n}{n^s} \to 0$ strebt für $r < s$, jedoch nicht mehr für $r \geqq s$. Also ist $r = -k$ mit $k < s \leqq k + 1$ die genaue Summierbarkeitsordnung.

2. Für die Auffindung etwaiger Zusammenhänge von Reihensätzen ist die Feststellung weiterer Eigenschaften von Bedeutung, welche mit der C-Summierbarkeit negativ-ganzzahliger Ordnung äquivalent sind. Wir definieren die C_k^{-1}-Summierbarkeit durch die Konvergenz der zur CESÀROschen Mittelbildung inversen Transformation und beweisen den folgenden

Satz 1. *Ist für ein $k \geqq 0$ die Reihe $\sum_0^\infty a_n$ C_k^{-1}-summierbar zur Summe s, so ist sie auch C_{-k}-summierbar zur selben Summe und umgekehrt.*

Zum Beweise folgern wir zunächst die Permanenzeigenschaft der C_k^{-1}-Summierbarkeit am einfachsten aus der für positive Ordnung bekannten

Matrizengleichung $H_1 C_{k-1} = {}^{\cdot}C_{k-1} H_1$ durch Übergang zur Reziproken $C_{k-1}^{-1} H_{-1} = H_{-1} C_{k-1}^{-1}$ oder

$$(5)\quad \triangle^{k-1}\left[\binom{n+k-1}{k-1} \triangle (n+1)\, s_n\right] = (n+1)\triangle^{k-1}\left[\binom{n+k-1}{k-1} s_n\right] - n\triangle^{k-1}\left[\binom{n+k-2}{k-1} s_{n-1}\right].$$

Addiert man auf beiden Seiten $(k-1)\triangle^{k-1}\left[\binom{n+k-1}{k-1} s_n\right]$, so findet man

$$(n+k)\triangle^{k-1}\left[\binom{n+k-1}{k-1} s_n\right] + n\triangle^{k-1}\left[\binom{n+k-2}{k-1} s_{n-1}\right] = k\triangle^k\left[\binom{n+k}{k} s_n\right].$$

Multiplikation dieser Gleichung mit $\frac{(n+k-1)!}{n!\,k!}$ liefert

$$(6)\quad \triangle\left[\binom{n+k}{k} C_{k-1}^{-1}(s_n)\right] = \binom{n+k-1}{k-1} C_k^{-1}(s_n).$$

Hieraus folgt durch Aufsummieren nach n und nachfolgende Division mit $\binom{n+k}{k}$ die Beziehung

$$C_{k-1}^{-1}(s) = \frac{\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\nu+k-1}{k-1} C_k^{-1}(s_\nu)}{\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\nu+k-1}{k-1}}.$$

Hieraus ist wegen der bekannten Verallgemeinerung des Cauchy-Toeplitzschen Grenzwertsatzes die behauptete Permanenz abzulesen.

Die Äquivalenz der C_{-k}- und C_k^{-1}-Summierbarkeit folgt nun unmittelbar aus den beiden Relationen

$$(7)\quad \triangle^k\left[\binom{n+k}{k} s_n\right] = s_n + \binom{k}{1}\binom{n}{1}\triangle s_n + + \binom{k}{2}\binom{n}{2}\triangle^2 s_n + \cdots + \binom{k}{k}\binom{n}{k}\triangle^k s_n,$$

$$(8)\quad (-1)^k\binom{n}{k}\triangle^k s_n = s_n - \binom{k}{1}\triangle\left[\binom{n+1}{1} s_n\right] + + \binom{k}{2}\triangle^2\left[\binom{n+2}{2} s_n\right] - \cdots + (-1)^k\binom{k}{k}\triangle^k\left[\binom{n+k}{k} s_n\right],$$

deren erste unter Anwendung der bekannten Formel

$$\triangle^k \alpha_n\beta_n = \sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}\triangle^\nu\alpha_n\,\triangle^{k-\nu}\beta_{n-\nu} \quad\text{und}\quad \triangle^k\binom{n+r}{n} = \binom{n+r-k}{n}$$

erhalten wird, und deren zweite die eindeutig vorhandene Auflösung des durch die erste Beziehung für $k = 0, 1, 2, \ldots$ gegebenen Gleichungssystems nach den $\binom{n}{k}\triangle^k s_n$ darstellt. Ist C_{-k}-$\sum_0^\infty a_n = s$, d. h. strebt $s_n \to s$ und $n^k\triangle^k s_n \to 0$, so strebt zufolge der Permanenz auch $n^\varkappa\triangle^\varkappa s_n \to 0$ für $\varkappa = 1, 2, \ldots, k$ und also nach der ersten Beziehung $\triangle^k\binom{n+k}{k} s_n \to s$, d. h.

es ist $C_k^{-1}\text{-}\sum_0^\infty a_n = s$. Wegen der Permanenz der C_k^{-1}-Summierbarkeit trifft nach der zweiten Beziehung auch der umgekehrte Schluß zu, womit die Äquivalenz der C_{-k}- und C_k^{-1}-Summierbarkeit bewiesen ist. Der Äquivalenzbeweis kann aber auch leicht direkt erbracht werden. Denn es bestehen für die C_k^{-1}-Mittel die beiden Relationen

$$k\,C_k^{-1}(s_n) - C_{k-1}^{-1}(s_n + na_n) = (k-1)\,C_{k-1}^{-1}(s_n), \tag{9}$$

$$k\,C_k^{-1}(s_n) - C_{k-1}^{-1}(s_n + na_n) = (k-1)\frac{\sum_{\nu=0}^{n} C_{k-1}^{-1}(s_\nu + \nu a_\nu)}{n+1}. \tag{10}$$

Erstere geht aus der trivialen Identität $(n+k)\,s_n - n s_{n-1} - (s_n + na_n) = (k-1)\,s_n$ durch Multiplikation mit $\binom{n+k-1}{k-1}$ und nachfolgende Ausübung der Differenzenbildung $\triangle^{k-1}$ hervor. Die zweite Relation folgt aus (5) durch Aufsummieren nach n und nachfolgende Division mit $n+1$. Dadurch erhält man die Gleichheit der rechten Seiten beider Relationen, die somit bewiesen sind.

Aus diesen beiden Relationen ist unmittelbar der dem früheren analoge Hilfssatz abzulesen, daß aus der C_k^{-1}-Limitierbarkeit der Folge s_n die C_{k-1}^{-1}-Limitierbarkeit der Folge $H_{-1}(s_n) = s_n + na_n$ folgt und umgekehrt. Hiernach ist wieder jede der Beziehungen

$$C_k^{-1}(s_n) \to s,\ C_{k-1}^{-1}(H_{-1}(s_n)) \to s,\ C_{k-2}^{-1}(H_{-2}(s_n)) \to s,\ \ldots,$$
$$C_1^{-1}(H_{-k+1}(s_n)) \equiv H_{-k}(s_n) \to s$$

eine Folge der übrigen; insbesondere ist die erste eine Folge der letzten Beziehung und umgekehrt, w. z. b. w.

3. Für die weitere Untersuchung enpfiehlt es sich, die beiden Differenzenbildungen $\Delta x_n = x_n - x_{n+1}$ und $\triangle x_n = x_n - x_{n-1}$ nebeneinander zu gebrauchen und durch die angegebenen Bezeichnungen zu unterscheiden. Es soll nun gezeigt werden, daß die C_{-k}-Summierbarkeit einer Reihe $\sum_0^\infty a_n = s$ im wesentlichen äquivalent ist mit der Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \Delta^k a_n = s.$$

Es gilt nämlich der

Satz 2 [14]). *Es ist* $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \Delta^k a_n = s$ *dann und nur dann konvergent, wenn ein Polynom* P_n *höchstens* $(k-1)$*-ten Grades existiert, so daß* $\sum_0^\infty (a_n - P_n) = s$ C_{-k}*-summierbar ist.*

[14]) Dieser Satz findet sich ohne Beweis in der in Fußnote 8 zitierten Arbeit des Verfassers.

Beweis. Zunächst zeigen wir, daß aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\Delta^k(a_n-P_n)$ die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1}\Delta^{k-1}(a_n-P_n)$ zur selben Summe folgt, wo P_n ein beliebiges Polynom höchstens $(k-1)$-ten Grades in n ist. Zwischen den Teilsummen beider Reihen besteht die Beziehung

$$(11)\quad \sum_{\nu=0}^{n}\binom{\nu+k-1}{k-1}\Delta^{k-1}(a_\nu-P_\nu) = \frac{k}{k+1}\binom{n+k}{k}\sum_{\nu=n}^{\infty}\frac{\sum_{\mu=0}^{\nu}\binom{\mu+k}{k}\Delta^k(a_\mu-P_\mu)}{\binom{\nu+k+1}{k+1}},$$

welche durch den Schluß von n auf $n+1$ bewiesen werde: für $n=0$ geht (11) über in

$$(12)\qquad \Delta^{k-1}(a_0-P_0) = \frac{k}{k+1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sum_{\mu=0}^{\nu}\binom{\mu+k}{k}\Delta^k(a_\mu-P_\mu)}{\binom{\nu+k+1}{k+1}}.$$

Wie sich durch einmalige Ausübung der Abelschen partiellen Summation auf die Summe $\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\nu+k}{k}\Delta^k(a_\nu-P_\nu)\Big/\binom{\nu+k}{k}$ und nachfolgenden Grenzübergang für $n\to\infty$ ergibt, ist die rechte Seite der Gleichung (12) gleich $\sum_{\nu=0}^{\infty}\Delta^k(a_\nu-P_\nu)=\Delta^{k-1}(a_0-P_0)$. Also ist (11) für $n=0$ richtig. Aus der Gültigkeit der Beziehung (11) für ein bestimmtes $n\geqq 0$ folgt dann durch Multiplikation mit $\frac{n+k+1}{k+1}$ und nachfolgendes Hinüberschaffen des ersten Reihengliedes auf die linke Seite die Gleichung

$$\frac{n+k+1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\nu+k-1}{k-1}\Delta^{k-1}(a_\nu-P_\nu)-\frac{k}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\nu+k}{k}\Delta^k(a_\nu-P_\nu)$$
$$=\frac{k}{k+1}\binom{n+1+k}{k}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{\sum_{\mu=0}^{\nu}\binom{\mu+k}{k}\Delta^k(a_\mu-P_\mu)}{\binom{\nu+k+1}{k+1}}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung erhält aber nach einmaliger Anwendung der partiellen Summation die Gestalt

$$\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\nu+k}{k}\Delta^k(a_\nu-P_\nu)+\frac{n+k+1}{n+1}\binom{n+k}{k}\Delta^{k-1}(a_{n+1}-P_{n+1})$$
$$=\sum_{\nu=0}^{n+1}\binom{\nu+k}{k}\Delta^k(a_\nu-P_\nu).$$

Somit hat man (11) für $n+1$ statt n erhalten, womit (11) bewiesen ist. Die rechte Seite der Gleichung (11) stellt eine lineare Transformation der Zahlenfolge $\sum_{\nu=0}^{n} \binom{\nu+k}{k} \Delta^k(a_\nu - P_\nu)$ dar mit der Matrix $T_{n\nu} = 0$ oder $= \frac{k}{k+1}\binom{n+k}{k} \Big/ \binom{\nu+k+1}{k+1}$, je nachdem $\nu < n$ oder $\nu \geqq n$ ist. Nun ist diese Matrix regulär, weil

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |T_{n\nu}| \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} T_{n\nu} = \frac{k}{k+1}\binom{n+k}{k} \sum_{\nu=n}^{\infty} 1 \Big/ \binom{\nu+k+1}{k+1} = 1$$

und $\lim_{n\to\infty} T_{n\nu} = 0$ ist für jedes $\nu \geqq 0$, wegen $T_{n\nu} = 0$ für $n > \nu$. Wegen der vorausgesetzten Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \Delta^k(a_n - P_n)$ strebt daher die rechte Seite von (11) gegen s, d. h. es ist $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} \Delta^{k-1}(a_n - P_n)$ konvergent, wie behauptet.

Nun folgt Satz 2 fast unmittelbar aus den beiden Identitäten

$$(13)\quad \sum_{\nu=0}^{n} \binom{\nu+k-1}{k-1} \Delta^{k-1}(a_\nu - P_\nu) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{\nu+k}{k} \Delta^k(a_\nu - P_\nu) + \binom{n+k}{k} \Delta^{k-1}(a_{n+1} - P_{n+1}),$$

$$(14)\quad \sum_{\nu=0}^{n} (a_\nu - P_\nu) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{\nu+k}{k} \Delta^k(a_\nu - P_\nu) + \sum_{\lambda=1}^{k} \binom{n+\lambda}{\lambda} \Delta^{\lambda-1}(a_{n+1} - P_{n+1}),$$

welche aus den Summen $\sum_{\nu=0}^{n} \binom{\nu+k-1}{k-1} \Delta^{k-1}(a_\nu - P_\nu)$ und $\sum_{0}^{n} (a_\nu - P_\nu)$ durch ein- bzw. k-malige Ausübung der partiellen Summation hervorgehen. Denn ist C_{-k}-$\sum_{0}^{\infty} (a_n - P_n) = s$, d. h. $\sum_{0}^{\infty} (a_n - P_n) = s$ konvergent und $n^k \Delta^{k-1}(a_n - P_n) \to 0$, so strebt wegen der Permanenz der C_{-k}-Summierbarkeit auch $n^\lambda \Delta^{\lambda-1}(a_n - P_n) \to 0$ für $\lambda = 1, 2, \ldots, k$, so daß $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \Delta^k(a_n - P_n)$ nach (14) zur Summe s konvergiert. Sei umgekehrt $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \Delta^k a_n = s$ konvergent vorausgesetzt. Dann ist wegen der Perma-

nenz des C_k-Verfahrens auch $C_k\text{-}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\Delta^k a_n = s$, so daß nach Satz 1 ein Polynom P_n höchstens $(k-1)$-ten Grades in n existiert, für das $\sum_0^{\infty}(a_n - P_n) - s$ konvergiert. Ferner strebt $n^k\,\Delta^{k-1}(a_n - P_n) \to 0$ nach (13), da mit $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\Delta^k(a_n - P_n) = s$ auch $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1}\Delta^{k-1}(a_n - P_n) = s$ konvergiert. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Schließlich merken wir noch den allgemeinen Satz an, welcher für $p = -k$ den Satz 2 als Spezialfall enthält:

Satz 3. *Ist $k \geqq 0$ und p beliebig, so ist $C_{p+k}\text{-}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\Delta^k a_n = s$ dann und nur dann, wenn ein Polynom höchstens $(k-1)$-ten Grades in n existiert, so daß $C_p\text{-}\sum_0^{\infty}(a_n - P_n) = s$ ist.*

Für positive p ist der Satz bereits 1926 von A. F. Andersen[15]) bewiesen worden. Für $p \geqq -k$ folgt er unmittelbar aus Satz 2 unter Benutzung des von Andersen herrührenden Satzes: Es ist $C_{p+1}\text{-}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k+1}{k+1}\Delta a_n = s$ dann und nur dann, wenn eine Konstante A existiert, so daß $C_p\text{-}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}(a_n - A) = s$ ist. Hierin ist $p \geqq -1$ vorausgesetzt. Doch gilt er für alle ganzzahligen p, woraus dann Satz 3 auch für $p < -k$ gefolgert werden kann. Ist $C_{p+k}\text{-}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\Delta^k a_n = s$, so ist das Polynom $P_n = A_1 n^{k-1} + A_2 n^{k-2} + \cdots + A_k$ eindeutig bestimmt. Die Koeffizienten lassen sich durch die Rekursionsformel

$$A_\lambda = \frac{(-1)^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!}\,C_p\text{-}\lim \Delta^{k-\lambda}\left[a_n - (A_1 n^{k-1} + A_2 n^{k-2} + \cdots + A_{\lambda-1} n^{k-\lambda+1})\right]$$

$$\text{mit}\quad \lambda = 2, 3, \ldots, k \quad\text{und}\quad A_1 = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\,C_p\text{-}\lim \Delta^{k-1} a_n$$

darstellen, wie durch vollständige Induktion leicht bestätigt werden kann.

Macht man in Satz 3 die Voraussetzung, daß $V\text{-}\lim a_n = 0$ ist, wo V ein willkürliches (lineares und permanentes) Limitierungsverfahren bezeichnet, so verschwindet das Polynom P_n identisch; denn ist $V\text{-}\lim a_n = 0$, so

[15]) Vgl. Fußnote 9.

folgt aus $\lim (a_n - P_n) = 0$ wegen der Permanenz und Linearität des V-Verfahrens $V\text{-}\lim P_n = 0$ also $P_n \equiv 0$. Es gilt also der

Satz 4. *Ist* $k \geqq 0$, p *beliebig und* $V\text{-}\lim a_n = 0$, *so ist* $C_{p+k}\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \Delta^k a_n = s$ *dann und nur dann, wenn* $C_p\text{-}\sum_{0}^{\infty} a_n = s$ *ist.*

Unter den engeren Voraussetzungen $p = -k$ und $\lim a_n = 0$ statt $V\text{-}\lim a_n = 0$ ist Satz 4 schon von Andersen[16]) bewiesen worden.

II. Die absolute C_{-k}-Summierbarkeit und äquivalente Eigenschaften.

1. In der Theorie der C-Summierbarkeit negativ-ganzzahliger Ordnung $-k$ fehlt bislang der Begriff der absoluten C-Summierbarkeit. Bevor wir diesen Begriff einführen, geben wir von dem bereits von Hausdorff a. a. O. erklärten Begriff der C_{-k}-Beschränktheit eine Definition, welche derjenigen Hausdorffs äquivalent ist. Bekanntlich versteht man unter der C_k-Beschränktheit einer Folge s_n positiver Ordnung k die Beschränktheit der Cesàroschen Mittel $C_k(s_n)$. Da nun die C_{-k}-Summierbarkeit nicht durch die Konvergenz einer einzelnen Zahlenfolge erklärt ist, so wird von dem Begriff der C_{-k}-Beschränktheit einer Folge s_n jedenfalls gefordert werden müssen, daß er mit der Beschränktheit der Folge $C_k^{-1}(s_n)$ äquivalent ist. In der Tat erweist sich die folgende naheliegende Definition als gleichwertig mit der Beschränktheit der C_k^{-1}-Mittel.

Definition. Die Folge der Teilsummen s_n einer Reihe $\sum_{0}^{\infty} a_n$ heißt C_{-k}-beschränkt, wenn die Folgen s_n und $n^k \triangle^{k-1} a_n$ beide beschränkt sind.

Satz 5. *Eine Folge* s_n *ist dann und nur dann* C_{-k}*-beschränkt, wenn die Folge* $C_k^{-1}(s_n)$ *beschränkt ist.*

Denn sei zunächst $s_n = a_0 + \cdots + a_n$ C_{-k}-beschränkt vorausgesetzt. Dann folgt der Reihe nach für $k \geqq 1$

$$\triangle^{k-1} a_n = O\left(\frac{1}{n^k}\right),$$

$$\triangle^{k-2} a_n = O\left(\frac{1}{n^{k-1}}\right) + A_1,$$

$$\triangle^{k-3} a_n = O\left(\frac{1}{n^{k-2}}\right) + A_1 n + A_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right) + A_1 n^{k-2} + A_2 n^{k-3} + \cdots + A_{k-1},$$

$$s_n = O(\ln n) + A_1 n^{k-1} + A_2 n^{k-2} + \cdots + A_{k-1} n.$$

[16]) Vgl. die in Fußnote 12 genannte Arbeit.

Wegen $s_n = O(1)$ muß $A_1 = A_2 = \cdots = A_{k-1} = 0$ sein, so daß $n^\lambda \triangle^{\lambda-1} a_n = O(1)$ ist für $\lambda = 1, 2, \ldots, k-1$. Daher folgt aus der Identität

$$(15)\quad C_k^{-1}(s_n) = s_n + \binom{k}{1}\binom{n}{1} a_n + \binom{k}{2}\binom{n}{2} \triangle a_n + \cdots + \binom{k}{k}\binom{n}{k} \triangle^{k-1} a_n$$

die Beschränktheit der Folge $C_k^{-1}(s_n)$.

Sei umgekehrt $C_k^{-1}(s_n)$ beschränkt vorausgesetzt. Dann folgt aus der Identität (vgl. S. 546)

$$C_{k-1}^{-1}(s_n) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{\nu+k-1}{k-1} C_k^{-1}(s_\nu) \Big/ \binom{n+k}{k},$$

daß auch $C_{k-1}^{-1}(s_n)$, $C_{k-2}^{-1}(s_n)$, $\ldots$, $C_0^{-1}(s_n) \equiv s_n$ beschränkte Folgen sind. Schließlich folgt aus der Identität

$$(-1)^k \binom{n}{k} \triangle^{k-1} a_n = s_n - \binom{k}{1} C_1^{-1}(s_n) + \binom{k}{2} C_2^{-1}(s_n) - \cdots + (-1)^k \binom{k}{k} C_k^{-1}(s_n)$$

die Beschränktheit der Folge $n^k \triangle^{k-1} a_n$, w. z. b. w.

Ferner gilt der folgende

Satz 6. *Die Folge s_n der Teilsummen einer Reihe $\sum_0^\infty a_n$ ist dann und nur dann C_{-k}-beschränkt, wenn die Teilsummen der Reihen $\sum_0^\infty a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \Delta^k a_n$ beide beschränkt sind.*

Denn ist die Folge s_n C_{-k}-beschränkt, so folgt aus Gleichung (14) für $P_n = 0$ und wegen $n^\lambda \triangle^{\lambda-1} a_n = O(1)$ für $\lambda = 1, 2, \ldots, k-1$, daß die Folge $\sum_{\nu=0}^{n} \binom{\nu+k}{k} \Delta^k a_\nu$ beschränkt ist. Ist umgekehrt s_n und $\sum_{\nu=0}^{n} \binom{\nu+k}{k} \Delta^k a_\nu$ beschränkt vorausgesetzt, dann folgt aus (11), daß für $\lambda = 1, 2, \ldots, k$ auch $\sum_{\nu=0}^{n} \binom{\nu+\lambda-1}{\lambda-1} \Delta^{\lambda-1}(a_\nu - P_\nu)$ beschränkt ist, wo P_n ein gewisses Polynom höchstens $(k-1)$-ten Grades in n ist. Insbesondere ist also $\sum_0^n (a_\nu - P_\nu) = s_n - Q_n$ beschränkt, wo $Q_n = \sum_0^n P_\nu$ ein Polynom höchstens k-ten Grades in n ist. Wegen der Beschränktheit von s_n muß aber Q_n vom 0-ten Grade sein und also P_n identisch verschwinden. Aus der Beschränktheit der Folge s_n und $\sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+k}{k} \Delta^k a_\nu$ folgt also, daß $\sum_{\nu=0}^{n} \binom{\nu+k-1}{k-1} \Delta^{k-1} a_\nu$ beschränkt ist. Hieraus ergibt sich aber wegen Gleichung (13) die Beschränktheit der Folge $n^k \triangle^{k-1} a_n$, womit alles bewiesen ist.

Allgemeiner soll unter der einseitigen C_{-k}-Beschränktheit einer Folge s_n verstanden werden, daß die Folgen s_n und $n^k \triangle^k s_n$ beide nach derselben Seite beschränkt sind. Wie aus der Beziehung (15) hervorgeht, verlangt diese Eigenschaft nicht weniger als die Forderung $C_k^{-1}(s_n) > -K$.

2. In der Theorie der C-Summierbarkeit wird in Analogie zur absoluten Konvergenz die absolute C_k-Summierbarkeit durch die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |C_k(s_n) - C_k(s_{n-1})|$ definiert. Da aber die C-Summierbarkeit negativer Ordnung nicht durch die Konvergenz einer einzelnen Zahlenfolge erklärt ist, jedoch mit der Konvergenz der C_k^{-1}-Mittel äquivalent ist, so liegt es nahe, den Begriff der „absoluten C_{-k}-Summierbarkeit" durch die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |C_k^{-1}(s_n) - C_k^{-1}(s_{n-1})| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \triangle^{k+1} \binom{n+k}{k} s_n \right|$ zu definieren. Auf Grund dieser

Definition. Eine Reihe $\sum_0^{\infty} a_n$ heißt absolut C_{-k}-summierbar, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \triangle^{k+1} \binom{n+k}{k} s_n \right|$ konvergiert, gilt der

Satz 7. *Für die absolute C_{-k}-Summierbarkeit einer Reihe $\sum_0^{\infty} a_n$ ist notwendig und hinreichend, daß die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \binom{n+k}{k} \Delta^k a_n \right|$ konvergiert und $V\text{-}\lim a_n = 0$ ist.*

Hierin bezeichnet V wieder ein beliebiges Limitierungsverfahren. Zum Beweise dieses Satzes gebrauchen wir die in den folgenden beiden Sätzen ausgesprochene Permanenzeigenschaft der Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \triangle^{k+1} \binom{n+k}{k} s_n \right|$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \binom{n+k}{k} \Delta^k a_n \right|$.

Hilfssatz 1. *Ist für ein $k \geqq 1$ die Reihe $\sum_{n=0} \left| \binom{n+k}{k} \Delta^k a_n \right|$ konvergent, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \binom{n+k-1}{k-1} \Delta^{k-1}(a_n - A_1 n^{k-1}) \right|$, wo $A_1 = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \lim_{n \to \infty} \Delta^{k-1} a_n$ ist.*

Nach Voraussetzung ist $\lim_{n \to \infty} \Delta^{k-1} a_n = (-1)^{k-1}(k-1)! A_1$ sicher vorhanden und daher

$$\sum_{\lambda=\nu}^{\infty} \Delta^k a_\lambda = \Delta^{k-1} a_\nu - (-1)^{k-1}(k-1)! A_1 = \Delta^{k-1}(a_\nu - A_1 \nu^{k-1}),$$

oder

$$\binom{\nu+k-1}{k-1}\Delta^{k-1}(a_\nu - A_1\nu^{k-1}) = \binom{\nu+k-1}{k-1}\sum_{\lambda=\nu}^{\infty}\frac{1}{\binom{\lambda+k}{k}}\binom{\lambda+k}{k}\Delta^k a_\lambda.$$

Aus dieser trivialen Identität ergibt sich die Abschätzung

$$\sum_{\nu=0}^{n}\left|\binom{\nu+k-1}{k-1}\Delta^{k-1}(a_\nu - A_1\nu^{k-1})\right| \leqq \sum_{\nu=0}^{n}\binom{\nu+k-1}{k-1}\sum_{\lambda=\nu}^{\infty}\frac{1}{\binom{\lambda+k}{k}}\left|\binom{\lambda+k}{k}\Delta^k a_\lambda\right|$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\lambda}\frac{\binom{\lambda+k-1}{k-1}}{\binom{\nu+k}{k}}\left|\binom{\nu+k}{k}\Delta^k a_\nu\right| = \sum_{\nu=0}^{n}\left|\binom{\nu+k}{k}\Delta^k a_\nu\right|.$$

Also ist $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1}\Delta^{k-1}(a_n - A_1 n^{k-1})$ absolut konvergent und

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\binom{n+k-1}{k-1}\Delta^{k-1}(a_n - A_1 n^{k-1})\right| \leqq \sum_{n=0}^{\infty}\left|\binom{n+k}{k}\Delta^k a_n\right|.$$

Durch Iteration des Hilfssatzes ergibt sich: Ist $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\binom{n+k}{k}\Delta^k a_n\right|$ konvergent, so konvergieren die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\binom{n+\mu}{\mu}\Delta^\mu(a_n - P_n)\right|$ für $0 \leqq \mu \leqq k$, wo $P_n = A_1 n^{k-1} + A_2 n^{k-2} + \cdots + A_k$ ein Polynom höchstens $(k-1)$-ten Grades ist, welches durch die Rekursionsformel

$$A_\lambda = \frac{(-1)^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!}\lim_{n\to\infty}\Delta^{k-\lambda}[a_n - (A_1 n^{k-1} + \cdots + A_{\lambda-1}n^{k-\lambda+1})]$$

für $\lambda = 2, 3, \ldots, k$ und $A_1 = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\lim_{n\to\infty}\Delta^{k-1}a_n$ eindeutig bestimmt ist. Besteht über die a_n die Voraussetzung $V\text{-}\lim a_n = 0$, wo V wieder ein beliebiges Limitierungsverfahren bezeichnet, so ist auch $V\text{-}\lim \Delta^{k-\lambda}a_n = 0$ für $1 \leqq \lambda \leqq k$ und also $A_1 = A_2 = \cdots = A_k = 0$, d. h. $P_n \equiv 0$.

Hilfssatz 2. *Ist für ein $k \geqq 1$ die Reihe $\sum_0^\infty a_n$ absolut C_{-k}-summierbar, so ist sie auch absolut C_{-k+1}-summierbar.*

Zunächst beweisen wir die Identität

$$\Delta\binom{n+k}{k}n\,\Delta C_{k-1}^{-1}(s_n) = n\binom{n+k-1}{k-1}\Delta C_k^{-1}(s_n). \tag{16}$$

Subtrahiert man von der mit n multiplizierten Gleichung (6) diejenige Gleichung, welche aus (6) durch Einsetzen von $n-1$ statt n und nachfolgender Multiplikation mit $n+k-1$ hervorgeht, so erhält man die Gleichung

$$n \triangle \binom{n+k}{k} C_{k-1}^{-1}(s_n) - (n+k-1) \triangle \binom{n+k-1}{k} C_{k-1}^{-1}(s_{n-1}) = n \binom{n+k-1}{k-1} \triangle C_k^{-1}(s_n).$$

Die Übereinstimmung der linken Seiten von (16) und dieser Gleichung bestätigt man leicht durch Ausführung der Differenzen. Durch Aufsummieren der Gleichung (16) nach n und nachfolgende Division mit $n\binom{n+k}{k}$ ergibt sich

$$\triangle C_{k-1}^{-1}(s_\nu) = \frac{1}{\nu\binom{\nu+k}{k}} \sum_{\lambda=1}^{\nu} \lambda \binom{\lambda+k-1}{k-1} \triangle C_k^{-1}(s_\lambda). \tag{17}$$

Der Übergang zur Ungleichung zwischen den Beträgen der linken Seite und den Gliedern der rechten Seite und nochmaliges Aufsummieren über ν von 1 bis n liefert die Abschätzung

$$\sum_{\nu=1}^{n} | \triangle C_{k-1}^{-1}(s_\nu) | \leqq \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu\binom{\nu+k}{k}} \sum_{\lambda=1}^{\nu} \lambda \binom{\lambda+k-1}{k-1} | \triangle C_k^{-1}(s_\lambda) |$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\lambda=\nu}^{n} \frac{\nu\binom{\nu+k-1}{k-1}}{\lambda\binom{\lambda+k}{k}} | \triangle C_k^{-1}(s_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} \left[1 - \frac{\binom{\nu+k-1}{k}}{\binom{n+k}{k}} \right] | \triangle C_k^{-1}(s_\nu) |.$$

Da für $1 \leqq \nu \leqq n$ die Faktoren $1 - \binom{\nu+k-1}{k} \Big/ \binom{n+k}{k} \leqq 1$ sind, so folgt

$$\sum_{\nu=0}^{n} | \triangle C_{k-1}^{-1}(s_\nu) | \leqq \sum_{\nu=0}^{n} | \triangle C_k^{-1}(s_\nu) |, \tag{18}$$

woraus die behauptete Permanenzeigenschaft unmittelbar abzulesen ist.

Der Beweis des Satzes 7 gelingt nun mit Hilfe der folgenden Beziehung:

$$\sum_{\nu=0}^{n-k} \binom{\nu+k}{k} \Delta^k a_\nu - \sum_{\nu=0}^{n-k} \binom{\nu+k-1}{k-1} \Delta^{k-1} a_\nu = s_n - \binom{k}{1} C_1^{-1}(s_n) + \binom{k}{2} C_2^{-1}(s_n) - \cdots + (-1)^k \binom{k}{k} C_k^{-1}(s_n). \tag{19}$$

Diese Relation folgt unmittelbar aus den Gleichungen (8) und (13), wenn man die Identität

$$(-1)^k \binom{n}{k} \triangle^k s_n = -\binom{n-k+k}{k} \Delta^{k-1} a_{n-k+1}$$

berücksichtigt. Aus (19) findet man durch einmalige Ausübung der Differenzenbildung, Übergang zur Ungleichung zwischen den Beträgen der Differenzen und nachfolgende Aufsummierung nach n die beiden Abschätzungen

$$(20)\quad \sum_{\nu=0}^{n-k}\left|\binom{\nu+k}{k}\Delta^k a_\nu\right| \leqq \sum_{\nu=0}^{n-k}\left|\binom{\nu+k-1}{k-1}\Delta^{k-1}a_\nu\right| + \\ + \sum_0^n |a_\nu| + \binom{k}{1}\sum_0^n |\triangle C_1^{-1}(s_\nu)| + \cdots + \binom{k}{k}\sum_{\nu=0}^n |\triangle C_k^{-1}(s_\nu)|,$$

$$(21)\quad \sum_{\nu=0}^n |\triangle C_k^{-1}(s_\nu)| \leqq \sum_{\nu=0}^{n-k}\left|\binom{\nu+k}{k}\Delta^k a_\nu\right| + \sum_{\nu=0}^{n-k}\left|\binom{\nu+k-1}{k-1}\Delta^{k-1}a_\nu\right| + \\ + \sum_0^n |a_\nu| + \binom{k}{1}\sum_0^n |\triangle C_1^{-1}(s_\nu)| + \cdots + \binom{k}{k-1}\sum_{\nu=0}^n |\triangle C_{k-1}^{-1}(s_\nu)|.$$

Hieraus ergibt sich Satz 7 fast unmittelbar durch den Schluß von m auf $m+1$: Sei der Satz für ein bestimmtes $k = m$ bereits bewiesen. Dann folgt aus der absoluten $C_{-(m+1)}$-Summierbarkeit der Reihe $\sum_0^\infty a_n$ ihre absolute $C_{-\mu}$-Summierbarkeit für $0 \leqq \mu \leqq m$ nach Hilfssatz 2 und damit wegen der Induktionsvoraussetzung die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^\infty \left|\binom{n+m}{m}\Delta^m a_n\right|$. Somit ist nach Ungleichung (20) die Reihe $\sum_{n=0}^\infty \left|\binom{n+m+1}{m+1}\Delta^{m+1}a_n\right|$ konvergent. Trivialerweise ist auch $V\text{-}\lim a_n = 0$. Umgekehrt folgt aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^\infty \left|\binom{n+m+1}{m+1}\Delta^{m+1}a_n\right|$ und $V\text{-}\lim a_n = 0$ die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^\infty \left|\binom{n+m}{m}\Delta^m a_n\right|$ nach Hilfssatz 1 und daraus wegen der Induktionsvoraussetzung die absolute C_{-m}-Summierbarkeit der Reihe $\sum_0^\infty a_n$. Wegen Hilfssatz 2 ist dann $\sum_0^\infty a_n$ auch absolut $C_{-\mu}$-summierbar für $0 \leqq \mu \leqq m$ und somit nach Ungleichung (21) auch absolut $C_{-(m+1)}$-summierbar. Also gilt Satz 7 für $k = m+1$, falls er für $k = m$ richtig ist. Für $k = 1$ ist aber der Satz gewiß richtig. Denn in diesem Fall lauten die Abschätzungen (20) und (21):

$$\sum_0^{n-1}|(\nu+1)\,\Delta a_\nu| \leqq 2\sum_0^n |a_\nu| + \sum_0^n |s_\nu + \nu a_\nu|$$

$$\sum_0^n |s_\nu + \nu a_\nu| \leqq 2\sum_0^n |a_\nu| + \sum_0^{n-1}|(\nu+1)\,\Delta a_\nu|,$$

aus denen die Gültigkeit des Satzes 6 für $k = 1$ abzulesen ist. Damit ist Satz 7 für alle $k \geqq 1$ bewiesen.

3. Schließlich beweisen wir noch die folgende Ausdehnung des Satzes von der Äquivalenz der absoluten C- und H-Summierbarkeit auf den Fall beliebig ganzzahliger Ordnung p.

Satz 8. *Ist für ein beliebig ganzzahliges p die Reihe $\sum_0^\infty a_n$ absolut H_p-summierbar, so ist sie auch absolut C_p-summierbar und umgekehrt.*

Der Beweis dieses Äquivalenzsatzes stützt sich auf den folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz. *Ist eine Reihe $\sum_0^\infty a_n$ absolut C_{-k}-summierbar, so ist die Reihe $\sum_0^\infty \triangle (s_n + n a_n) = \sum_0^\infty \triangle H_{-1}(s_n)$ erst absolut C_{-k+1}-summierbar und umgekehrt.*

Denn nach diesem Hilfssatz folgt aus der Konvergenz irgendeiner der Reihen

$$\sum_0^\infty |\triangle C_k^{-1}(s_n)|,\ \sum_0^\infty |\triangle C_{k-1}^{-1}(H_{-1}(s_n))|,\ \sum_0^\infty |\triangle C_{k-2}^{-1}(H_{-2}(s_n))|,\ \cdots,$$

$$\sum_0^\infty |\triangle C_1^{-1}(H_{-k+1}(s_n))| \equiv \sum_0^\infty |\triangle (H_{-k}(s_n))|$$

die Konvergenz jeder anderen Reihe. Insbesondere ist für die Konvergenz der letzten Reihe, d. h. für die absolute H_{-k}-Summierbarkeit von $\sum_0^\infty a_n$ die Konvergenz der ersten Reihe, d. h. die absolute C_{-k}-Summierbarkeit von $\sum_0^\infty a_n$, notwendig und hinreichend. Das ist aber der Inhalt des Satzes 8 für negative Ordnung $p = -k$.

Zum Beweise des Hilfssatzes bestätigen wir zunächst die beiden Formeln

$$\triangle C_{k-1}^{-1}(s_n + n a_n) = k \triangle C_k^{-1}(s_n) + (1-k) \triangle C_{k-1}^{-1}(s_n), \tag{22}$$

$$\triangle C_k^{-1}(s_n) = \frac{1}{k} \triangle C_{k-1}^{-1}(s_n + n a_n) + \left(1 - \frac{1}{k}\right) \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\nu}{n(n+1)} \triangle C_{k-1}^{-1}(s_\nu + \nu a_\nu). \tag{23}$$

Erstere ist nur eine triviale Umformung der Gleichung (9). Zum Beweise der zweiten Formel machen wir von der einfachen Identität $\triangle [(n+1)\, n \triangle x_n] = n \triangle^2 (n+1)\, x_n$ Gebrauch, indem wir

$$x_n = \frac{\sum_{\nu=0}^{n} C_{k-1}^{-1}(s_\nu + \nu a_\nu)}{n+1}$$

setzen, dann nach n aufsummieren und die erhaltene Gleichung mit $n(n+1)$ dividieren. Setzt man die so gewonnene Umformung

$$\triangle \frac{\sum_{\nu=0}^{n} C_{k-1}^{-1}(s_\nu + \nu a_\nu)}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{\nu=0}^{n} \nu \triangle C_{k-1}^{-1}(s_\nu + \nu a_\nu)$$

in diejenige Gleichung ein, welche aus (20) durch einmalige Ausübung der Differenzenbildung hervorgeht, dann ergibt sich die Formel (22). Nun bekommt man aus (22) und (23) durch Bildung der absoluten Beträge und nachfolgende Aufsummierung nach n die beiden Abschätzungen

$$\sum_{\nu=0}^{n} |\triangle C_{k-1}^{-1}(s_\nu + \nu a_\nu)| \leqq k \sum_{\nu=0}^{n} |\triangle C_k^{-1}(s_\nu)| + (k-1) \sum_{\nu=0}^{n} |\triangle C_{k-1}^{-1}(s_\nu)|,$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\triangle C_k^{-1}(s_\nu)| \leqq \frac{1}{k} \sum_{\nu=1}^{n} |\triangle C_{k-1}^{-1}(s_\nu + \nu a_\nu)| +$$

$$+ \left(1 - \frac{1}{k}\right) \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{\nu} \frac{\lambda}{\nu(\nu+1)} |\triangle C_{k-1}^{-1}(s_\lambda + \lambda a_\lambda)|.$$

Erstere geht mit Rücksicht auf Ungleichung (18) über in

$$\sum_{\nu=0}^{n} |\triangle C_{k-1}^{-1}(s_\nu + \nu a_\nu)| \leqq (2k-1) \sum_{\nu=0}^{n} |\triangle C_k^{-1}(s_\nu)|. \tag{24}$$

Die zweite Abschätzung geht wegen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{\nu} \frac{\lambda}{\nu(\nu+1)} |\triangle C_{k-1}^{-1}(s_\lambda + \lambda a_\lambda)| = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{\nu} \frac{\nu}{\lambda(\lambda+1)} |\triangle C_{k-1}^{-1}(s_\nu + \nu a_\nu)|$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right) |\triangle C_{k-1}^{-1}(s_\nu + \nu a_\nu)| \leqq \sum_{\nu=1}^{n} |\triangle C_{k-1}^{-1}(s_\nu + \nu a_\nu)|$$

in

$$\sum_{\nu=0}^{n} |\triangle C_k^{-1}(s_\nu)| \leqq \sum_{\nu=0}^{n} |\triangle C_{k-1}^{-1}(s_\nu + \nu a_\nu)| \tag{25}$$

über. Aus (24) und (25) folgt unmittelbar der behauptete Hilfssatz, womit der Beweis des Satzes 8 erbracht ist.

III. Weitere Anwendungen des Begriffs der C_{-k}-Summierbarkeit.

1. Zunächst soll als ein weiteres Beispiel eines Reihensatzes, welcher auf C-summierbare Reihen beliebig ganzzahliger Summabilitätsordnung verallgemeinert werden kann, ein Umkehrsatz gewählt werden, nämlich der

Umkehrsatz von Doetsch[17]). *Ist die Reihe* $\sum_0^\infty a_n$ C_k*-summierbar zur* $\ldots$*mme* s *und einseitig* C_{k-2}*-beschränkt, so ist sie schon* C_{k-1}*-summierbar zur* $\ldots$*ben Summe.*

Dieser Satz, welcher für $k = 1$ den Hardy-Landauschen O_L-$C_1 \to K$-$\ldots$tz als Spezialfall enthält, behält auch für negativ-ganzzahliges k seine $\ldots$ültigkeit. Dies ergibt sich aus dem folgenden, gleichfalls von G. Doetsch[18]) $\ldots$wiesenen sehr allgemeinen Grenzwertsatz:

Strebt $c_n/n^p \to A$ und ist $\triangle^2 c_n/n^{p-2} > -K$, so strebt $\triangle c_n/n^{p-1} \to A\,p$, $\ldots$o p, A und K beliebig reell sind. Setzt man hierin $p = -k$, $A = 0$ und $\ldots = \triangle^k s_n$ für $k \geqq 1$ und fügt noch die Aussage $s_n \to s$ zur Voraussetzung $\ldots$d Behauptung des Grenzwertsatzes hinzu, so geht dieser gerade in den $\ldots$mkehrsatz für $-k$ statt k über. Der Umkehrsatz besteht also für beliebig $\ldots$nzzahliges k. Zugleich erscheinen damit beide Sätze als Spezialfälle eines $\ldots$nzigen Satzes.

Das folgende Beispiel zeigt, daß der Begriff der C_{-k}-Summierbarkeit $\ldots$zu beiträgt, auch zur klassischen Reihenlehre eine weitergehende Analogie $\ldots$rzustellen. In der Theorie der C-Summierbarkeit positiver Ordnung konnte $\ldots$kein Analogon zu dem Satz geben, wonach aus $\lim A_n = A$ und $\lim B_n = B$ $\ldots$r $\lim A_n B_n = AB$ folgt, da ja aus der C-Limitierbarkeit positiver Ordnung $\ldots$r Folgen A_n und B_n nicht notwendig die C-Limitierbarkeit der Folge $A_n B_n$ $\ldots$lgt. Die Verallgemeinerung auf beliebig ganzzahlige Limitierungsordnung k $\ldots$utet:

Satz 9. *Aus* $C_k\text{-}\lim A_n = A$ *und* $C_{-k}\text{-}\lim B_n = B$ *folgt*

$$C_{|k|}\text{-}\lim A_n B_n = AB.$$

Zum Beweise dieses Satzes bestätigen wir für positives k zunächst die $\ldots$ormel

$$A_n B_n = \sum_{\lambda=0}^{k} C_\lambda^{-1}\Big[C_k(A_n)\cdot\binom{n+k}{k-\lambda}\,\Delta^{k-\lambda}\,B_{n+\lambda}\Big]. \tag{26}$$

$\ldots$elche durch leichte Umformung aus der Beziehung

$$A_n B_n = \sum_{\lambda=0}^{k}\binom{k}{\lambda}\,\Delta^\lambda[A_n^{(k)}\,\Delta^{k-\lambda}\,B_{n+\lambda}] \tag{27}$$

$\ldots$rvorgeht. Darin ist, wie üblich, $A_n^{(\varkappa)} = A_0^{(\varkappa-1)} + \cdots + A_n^{(\varkappa-1)}$ für $\varkappa \geqq 1$ $\ldots$d $A_n^{(0)} = A_n$ gesetzt. (27) ist für $k = 0$ gewiß richtig. Sei (27) für ein be-

[17]) G. Doetsch, Über die Cesàrosche Summabilität bei Reihen und eine Erweiterung des Grenzwertbegriffs bei integrablen Funktionen. Math. Zeitschr. **11** (1921), S. 166.

[18]) G. Doetsch, a. a. O., S. 161.

stimmtes $k \geqq 0$ bereits bewiesen. Dann folgt durch Anwendung der einfachen Umformung $x_n y_n = (x_0 + \cdots + x_n) \Delta y_n + \Delta [(x_0 + \cdots + x_n) y_{n+1}$ auf das Produkt $A_n^{(k)} \Delta^{k-\lambda} B_{n+\lambda}$ in (27),

$$A_n B_n = \sum_{\lambda=0}^{k+1} \binom{k}{\lambda} \Delta^\lambda [A_n^{(k+1)} \Delta^{k+1-\lambda} B_{n+\lambda}] + \sum_{\lambda=0}^{k} \binom{k}{\lambda} \Delta^{\lambda+1} [A_n^{(k+1)} \Delta^{k-\lambda} B_{n+\lambda+1}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{k+1} \binom{k}{\lambda} \Delta^\lambda [A_n^{(k+1)} \Delta^{k+1-\lambda} B_{n+\lambda}] + \sum_{\lambda=0}^{k+1} \binom{k}{\lambda-1} \Delta^\lambda [A_n^{(k+1)} \Delta^{k+1-\lambda} B_{n+\lambda}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{k+1} \left[\binom{k}{\lambda} + \binom{k}{\lambda-1} \right] \Delta^\lambda [A_n^{(k+1)} \Delta^{k+1-\lambda} B_{n+\lambda}]$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{k+1} \binom{k+1}{\lambda} \Delta^\lambda [A_n^{(k+1)} \Delta^{k+1-\lambda} B_{n+\lambda}$$

Also ist (27) auch für $k+1$ statt k richtig, w. z. b. w. Somit ist (26) für alle $k \geqq 0$ bewiesen. Nun folgt aus der Voraussetzung $C_{-k}\text{-}\lim B_n = B$ nach Definition und der Permanenzeigenschaft des C_{-k}-Limes, daß

$$\lim_{n \to \infty} \binom{n+\varkappa}{\varkappa} \Delta^\varkappa B_n = B \quad \text{oder} \quad = 0$$

ist, je nachdem $\varkappa = 0$ oder $1 \leqq \varkappa \leqq k$.

Andererseits liest man aus (26) unmittelbar ab, daß die C_λ-Mittel des λ-ten Gliedes der $(k+1)$-gliedrigen Summe (26) offenbar

$$= C_k(A_n) \cdot \binom{n+\lambda+k-\lambda}{k-\lambda} \Delta^{k-\lambda} B_{n+\lambda}$$

sind und also für $n \to \infty$ gegen AB oder 0 streben, je nachdem $\lambda = k$ oder $0 \leqq \lambda \leqq k-1$ ist. Also sind alle Glieder der Summe (26) C_k-limitierbar und damit auch die Folge $A_n B_n$ C_k-limitierbar zum Werte $0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots + AB = AB$, was zu beweisen war.

2. Ein weiterer Satz der Reihenlehre, dessen Verallgemeinerung auf C-summierbare Reihen nur mit Hilfe des Begriffs der C-Summierbarkeit negativer Ordnung gelingt, ist das bekannte Konvergenzkriterium von Du Bois-Reymond und Dedekind:

Die Reihe $\sum_0^\infty a_n b_n$ konvergiert, wenn $\sum_0^\infty a_n$ konvergent und $\sum_0^\infty (b_n - b_{n+1})$ absolut konvergent ist.

Es besteht das folgende, für beliebig ganzzahlige k gültige Analogon:

Satz 10. *Die Reihe $\sum_0^\infty a_n b_n$ ist $C_{|k|}$-summierbar, wenn $\sum_0^\infty a_n$ C_k-summierbar und $\sum_0^\infty (b_n - b_{n+1})$ absolut C_{-k}-summierbar ist.*

Die beiden, den positiven und negativen Werten von k entsprechenden älften dieses Satzes sind aber — wie im folgenden nachgewiesen werden oll — wegen der Sätze 3 und 7 nur eine andere Formulierung der beiden lgenden Sätze, deren erster im wesentlichen schon 1909 von H. Bohr[19]) nd G. H. Hardy[20]) herrührt, und deren zweiter von A. F. Andersen[21]) 934 bewiesen wurde:

Satz von Bohr-Hardy. *Ist für ein ganzzahliges* $k \geqq 0$

1. $\sum_0^\infty a_n$ C_k*-summierbar und*

2. $\sum_{n=0}^\infty \left| \binom{n+k}{k} \Delta^k (b_n - b_{n+1}) \right|$ *konvergent und die Folge* b_n *beschränkt,*

ann ist $\sum_0^\infty a_n b_n$ C_k*-summierbar.*

Satz von Andersen. *Ist für ein ganzzahliges* $k \geqq 0$

1. $\sum_0^\infty a_n$ *absolut* C_k*-summierbar und*

2. $\sum_{n=0}^\infty \binom{n+k}{k} \Delta^k (b_n - b_{n+1})$ *konvergent und die Folge* b_n *beschränkt,*

ann ist $\sum_0^\infty a_n b_n$ C_k*-summierbar.*

Da mit $b_n = O(1)$ insbesondere $C_1\text{-}\lim (b_n - b_{n+1}) = 0$ ist, so folgt egen Satz 7 aus der Voraussetzung 2 des Bohr-Hardyschen Satzes, daß $\sum_0^\infty (b_n - b_{n+1})$ absolut C_{-k}-summierbar ist. Umgekehrt folgt aus der ab-

oluten C_{-k}-Summierbarkeit der Reihe $\sum_0^\infty (b_n - b_{n+1})$ die Voraussetzung des ohr-Hardyschen Satzes, da die Folge b_n dann gewiß beschränkt ist. Also esagt der Bohr-Hardysche Satz gerade die den positiven Werten von k ntsprechende Hälfte des Satzes 10.

Um nachzuweisen, daß die andere Hälfte des Satzes 10 sich mit dem nhalt des Andersenschen Satzes deckt, beachte man zunächst, daß die oraussetzung 2 dieses Satzes wegen der Sätze 3 und 4 mit der C_{-k}-Summier-arkeit der Reihe $\sum_0^\infty (b_n - b_{n+1})$ gleichwertig ist. Ersetzt man dann a_n durch

[19]) H. Bohr, Bidrag til de Dirichlet'ske Roekkers Theori, S. 61 (København 1910).

[20]) G. H. Hardy, Generalization of a theorem in the theory of divergent series. roc. Lond. Math. Soc. (2) 6 (1908), S. 255.

[21]) A. F. Andersen, Über die Anwendung von Differenzen nicht ganzer Ordnung der Reihentheorie. Ättonde skandinaviska Matematikerkongressen i Stockholm 934, S. 345.

$b_n - b_{n+1}$ und zugleich b_n durch $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, so erhält der Andersensche Satz die Form: Ist 1. $\sum_0^\infty (b_n - b_{n+1})$ absolut C_k-summierbar und 2. $\sum_0^\infty a$ C_{-k}-summierbar, dann ist $\sum_0^\infty (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)(b_n - b_{n+1})$ C_k-summierbar. — Nun ist wegen der beiden Voraussetzungen 1 und 2 dieses Satzes die Folge $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ C_{-k}-limitierbar und die Folge $\sum_0^n (b_\nu - b_{\nu+}$ $- - b_{n+1}$ C_k-limitierbar und daher nach Satz 9 auch die Folge $(a_0 + a_1$ $+ \cdots + a_n) b_{n+1}$ C_k-limitierbar. Also ist wegen der Identität

$$\sum_0^n (a_0 + a_1 + \cdots + a_\nu)(b_\nu - b_{\nu+1}) = \sum_0 a_\nu b_\nu - (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) b_{n+1}$$

die Reihe $\sum_0^\infty (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)(b_n - b_{n+1})$ dann und nur dann C_k-summierbar, wenn $\sum_0^\infty a_n b_n$ C_k-summierbar ist. Damit ist gezeigt, daß der Andersensche Satz gerade die den negativen Werten von k entsprechende Hälfte des Satzes 1 darstellt. Unter Verwendung des Begriffs der C-Summierbarkeit negativer Ordnung lassen sich also auch der Bohr-Hardysche und der Andersensche Satz zu dem einen Satz 10 von besonders einfacher Form verschmelzen.

(Eingegangen am 2. September 1943.)

Über eine algebraische Identität zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel von n positiven Zahlen.

Von

Alexander Dinghas in Berlin.

1. In der vorliegenden kurzen Note[1]) wird eine algebraische Identität zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel von n positiven Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gegeben, die als eine unmittelbare Verallgemeinerung der längst bekannten Identität

$$a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1 a_2} = (\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1})^2 \tag{1.1}$$

angesehen werden kann, und die folgendermaßen lautet:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n - n\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \sum_{k=2}^{n} (a_k^{\frac{1}{k}} - G_{k-1}^{\frac{1}{k}})^2 P_{k-2}(a_k^{\frac{1}{k}}, G_{k-1}^{\frac{1}{k}}). \tag{1.2}$$

Dabei bedeutet G_k das geometrische Mittel der k ersten Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(k \leqq n)$ und $P_k(x, a)$ das Polynom

$$x^k + 2\,x^{k-1}\,a + \cdots + (k+1)\,a^k, \qquad P_0(x, a) = 1.$$

2. Zum Beweis von (1.2) gelangen wir durch Induktion. Da (1.2) für $n = 2$ in (1.1) übergeht, so können wir annehmen, daß $n \geqq 3$ und (1.2) richtig sei, wenn man dort $n - 1$ an Stelle von n schreibt. Setzt man dann

$$F_n(a) = a_1 + \cdots + a_n - n\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n},$$

$$F_{n-1}(a) = a_1 + \cdots + a_{n-1} - (n-1)\sqrt[n-1]{a_1 \ldots a_{n-1}},$$

[1]) Der Inhalt dieser Note wurde im Juni 1943 Herrn Prof. PERRON brieflich mitgeteilt. Die Anregung zu dieser Note verdanke ich Herrn Prof. VON LAUE, der mir einen interessanten Beweis (mittels Determinanten) von

$$a_1 + \cdots + a_n - n\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \geqq 0$$

mitteilte.

so wird

$$F_n(a) = F_{n-1}(a) + a_n - n a_n^{\frac{1}{n}} G_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} + (n-1) G_{n-1}{}^{2)}, \tag{2.1}$$

oder

$$F_n(a) = \sum_{k=2}^{n-1} \left(a_k^{\frac{1}{k}} - G_{k-1}^{\frac{1}{k}}\right)^2 P_{k-2}\left(a_k^{\frac{1}{k}}, G_{k-1}^{\frac{1}{k}}\right) + \\ + a_n - n a_n^{\frac{1}{n}} G_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} + (n-1) G_{n-1}. \tag{2.2}$$

Nun ist allgemein für ein ganzzahliges k $(k \geqq 2)$

$$x^k - k x a^{k-1} + (k-1) a^k = (x-a)^2 P_{k-2}(x, a); \tag{2.3}$$

es wird also tatsächlich, wenn man hier $k = n$, $x = a_n^{\frac{1}{n}}$, $a = G_{n-1}^{\frac{1}{n}}$ setzt,

$$F_n(a) = \sum_{k=2}^{n} \left(a_k^{\frac{1}{k}} - G_{k-1}^{\frac{1}{k}}\right)^2 P_{k-2}\left(a_k^{\frac{1}{k}}, G_{k-1}^{\frac{1}{k}}\right). \tag{2.4}$$

Somit ist der Beweis von (1. 2) erbracht worden. Da die rechte Seite von (1. 2) nicht negativ ist, so folgt hieraus die klassische Ungleichung $F_n(a) \geqq 0$ unmittelbar. Das Gleichheitszeichen tritt dann und nur dann ein, wenn $a_2 = G_1 = a_1, a_3 = G_2, \ldots, a_n = G_{n-1}$ wird, also genau dann, wenn $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ ist.

Zum Schluß möchte ich noch bemerken, daß man aus (2. 4) eine interessante Abschätzung von $F_n(a)$ nach unten erhält, wenn man von der Ungleichung

$$P_{k-2}(x, a) \geqq (k-1) \sqrt[k-1]{(k-1)!}\, (xa)^{\frac{k-2}{2}}$$

ausgeht [die durch Anwendung von $F_n(a) \geqq 0$ auf die Summanden von $P_{k-2}(x, a)$ folgt] und diese für jedes Polynom $P_k\left(a_k^{\frac{1}{k}}, G_{k-1}^{\frac{1}{k}}\right)$, $(k = 2, 3, \ldots, n$ anschreibt.

Man erhält dann die Ungleichung

$$F_n(a) \geqq \sum_{k=2}^{n} (k-1) \sqrt[k-1]{(k-1)!}\, \left(a_k^{\frac{1}{k}} - G_{k-1}^{\frac{1}{k}}\right)^2 (a_k G_{k-1})^{\frac{k-2}{2k}} \geqq 0.$$

---

[2]) Die Ungleichung $F_n(a) - F_{n-1}(a) = a_n - n a_n^{\frac{1}{n}} G_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} + (n-1) G_{n-1} \geqq$ und der damit verbundene Beweis von $F_n(a) \geqq 0$, wurde zuerst von R. RADÒ (vgl. HARDY-LITTLEWOOD-POLYA, Inequalities, Cambridge 1934, S. 61, Aufgabe 60) gegeben. Das Neue der vorliegenden Note besteht in dem Beweis der Identität (1. 2), die ihrerseits sich auf die Identität (2. 3) stützt. — Eine algebraische Identität von ganz anderem Bau zwischen den beiden Mitteln gab A. HURWITZ [J. reine angew. Math. **10** (1891), 266—268; Werke II, S. 505—507].

(Eingegangen am 2. September 1943.)

Eine Verallgemeinerung des Rungeschen Satzes.

Von

Martin Eichler in Göttingen.

1. Formulierung des Satzes.

Der Rungesche Satz, nach dem sich jede in einem einfach zusammenängenden Bereich $\mathfrak{G}$ der komplexen Zahlenebene reguläre analytische unktion durch Polynome annähern läßt, kann auch folgendermaßen rein eell formuliert werden:

In der xy-Ebene sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{G}$ gegeben, nd $u(x, y)$ sei eine in $\mathfrak{G}$ reguläre Lösung der Differentialgleichung

1) $$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

ann läßt sich u durch spezielle Lösungen von (1) der Gestalt

$$U_\mu = \alpha_{\mu 0} + \sum_{\nu=1}^{\mu} (\alpha_{\mu\nu} \cos \nu\varphi + \beta_{\mu\nu} \sin \nu\varphi)\, r^\nu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots)$$

it

$$r e^{i\varphi} = x + iy$$

leichmäßig in jedem abgeschlossenen Teil von $\mathfrak{G}$ approximieren.

Es reicht also bereits ein einziges vollständiges Lösungssystem von (1) n, um alle Lösungen für ein beliebiges Gebiet darzustellen: dies ist die ne Bedeutung des Rungeschen Satzes. Eine andere ist die folgende: Man ann jede in $\mathfrak{G}$ reguläre Lösung von (1) bzw. jede hier reguläre analytische unktion durch solche Lösungen von (1) bzw. analytische Funktionen pproximieren, die sich über $\mathfrak{G}$ hinaus analytisch fortsetzen lassen. Gerade iese letztere Bedeutung legt es nahe, sich bei dem Versuch, den Rungeschen atz auf allgemeinere lineare partielle Differentialgleichungen zu übertragen, nächst auf solche Differentialgleichungen zu beschränken, in deren Theorie er Begriff der analytischen Fortsetzung eine ähnlich wichtige Rolle spielt ie in der komplexen Funktionentheorie. Das sind gerade die elliptischen ifferentialgleichungen mit analytischen Koeffizienten[1]).

[1]) Vgl. E. Hopf, Über den funktionalen, insbesondere den analytischen Charakter er Lösungen elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Math. Zeitschr. 34 931), S. 194 und die weitere dort angegebene Literatur.

Zunächst formuliere ich die Voraussetzungen, unter denen ich den Rungeschen Satz hier in allgemeinerer Form beweisen will:

1) Im Raume der Cartesischen Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ seien $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{G}$ nach Abschluß durch ihre Oberflächen zwei einfach zusammenhängende Gebiete und $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{R}$. Ihre Oberflächen seien glatt und endlich.

Die Punkte von $\mathfrak{R}$ werden als Vektoren $\mathfrak{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ geschrieben.

2) Die Koeffizienten der Differentialgleichung

$$L[u] = \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik} u_{x_i x_k} + \sum_{j=1}^{n} B_j u_{x_j} + C u = 0 \tag{2}$$

seien in $\mathfrak{R}$ von den Koordinaten analytisch abhängig; (2) sei vom elliptischen Typus, und es sei

$$A_{ik} \geqq 0, \quad C \leqq 0. \tag{3}$$

3) Es sei $u_1(\mathfrak{x})$, $u_2(\mathfrak{x}), \ldots$ in $\mathfrak{R}$ ein System von linear unabhängigen Lösungen von (2) von folgender Beschaffenheit: Sie seien auf dem Rande $\mathfrak{f}$ von $\mathfrak{R}$ noch integrierbar, und wenn man sie hier nach dem Verfahren von Erh. Schmidt zu dem System $p_\nu(\mathfrak{x})$ orthogonalisiert, so entstehe ein vollständiges Funktionensystem, das also für jede auf $\mathfrak{f}$ noch integrierbare Funktion $u(\mathfrak{x})$ die Vollständigkeitsrelation erfüllt.

4) Für $\mathfrak{R}$ und alle in $\mathfrak{R}$ gelegenen Gebiete mit glattem Rand existiere die Greensche Funktion $G(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$.

Zu der vierten Voraussetzung werden im zweiten Abschnitt noch einige Bemerkungen zu machen sein.

Die Behauptung lautet:

I) Das System $u_1(\mathfrak{x}), u_2(\mathfrak{x}), \ldots$ ist auch auf dem Rande $\mathfrak{g}$ von $\mathfrak{G}$ im Sinne der Voraussetzung 3) vollständig.

II. Orthogonalisiert man die $u_\nu(\mathfrak{x})$ auf $\mathfrak{g}$ zu einem Funktionensystem $q_\nu(\mathfrak{x})$, und entwickelt man eine in $\mathfrak{G}$ reguläre [2]) und auf $\mathfrak{g}$ noch integrierbare Lösung $u(\mathfrak{x})$ von (2) auf $\mathfrak{g}$ in der Form

$$u(\mathfrak{x}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu q_\nu(\mathfrak{x}), \tag{4}$$

so konvergieren die Teilsummen von (4) in jedem abgeschlossenen Teil von $\mathfrak{G}$ gleichmäßig gegen $u(\mathfrak{x})$.

Die $u_\nu(\mathfrak{x})$ vertreten also die Rolle der Potenzen der komplexen Variablen im speziellen Rungeschen Satze; das Gebiet $\mathfrak{R}$ entspricht einem Kreise in der komplexen Zahlenebene um den Nullpunkt, der so groß ist, daß er $\mathfrak{G}$ ganz im Innern enthält. Die approximierende Funktionenfolge ist hier ähnlich

[2]) Unter einer regulären Lösung der Differentialgleichung (2) wird im folgenden eine solche verstanden, auf die der zitierte Analytizitätssatz anwendbar ist; z. B. setzt E. Hopf die Existenz von sechs stetigen Ableitungen voraus.

ie bei dem Faberschen Beweise des Rungeschen Satzes[3]) ihrer Natur nach ereits durch das Gebiet $\mathfrak{G}$ vorgeschrieben; erst die Entwicklungskoeffizienten ängen von der zu approximierenden Funktion ab und sind auf Grund ihrer onstruktion eindeutig festgelegt.

Der leitende Gedanke des Beweises ist durch die Behauptung II bereits ngedeutet. Im dritten Abschnitt werde ich diesen Teil der Behauptung us dem Teil I durch eine ganz leichte Schlußfolgerung herleiten. Der Schwerunkt der Beweisführung liegt in der Begründung von I, und hierzu wird in rei Schritten vorgegangen. Im ersten wird zur Vorbereitung auf Späteres orausgesetzt, daß die zu approximierende Funktion $u(\mathfrak{x})$ sogar in $\mathfrak{R}$ definiert t und gezeigt, daß eine jetzt fast trivialerweise existierende approximierende olge gerade in der unter II genannten Art erzeugt werden kann; auf diese Veise wird sich unter der gemachten Zusatzvoraussetzung die Vollständigeit der $u_\nu(\mathfrak{x})$ auf $\mathfrak{g}$ ergeben. Genau umgekehrt wird in den beiden folgenden chritten verfahren, von denen der eine das Vorliegen eines Spezialfalles nnimmt und der andere die Zurückführbarkeit des allgemeinen Falles auf iesen speziellen zeigt. In beiden Schritten wird nämlich die Behauptung I irekt angesteuert, und zwar im zweiten, indem die Vollständigkeitsrelation ür die in II genannten Funktionen $q_\nu(x)$ als eine Identität für analytische unktionen einer komplexen Variablen geschrieben und mit Hilfe des Prinzips er analytischen Fortsetzung einer Funktionalgleichung bewiesen wird. ierbei wird der obengenannte Satz über die Analytizität von Lösungen on (2) eine wesentliche Rolle spielen. Der dritte Schritt enthält demgegenber elementare Überlegungen.

2. Eine Vorbemerkung.

Unter der Greenschen Funktion $G(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ ist für das Gebiet $\mathfrak{R}$ bekanntlich ne solche Funktion der zwei Variablenreihen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ zu verstehen, die in der ariablenreihe $\mathfrak{x}$ eine in $\mathfrak{R}$ reguläre Lösung der zu (2) adjungierten Differentialeichung ist, mit alleiniger Ausnahme des Punktes $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$, wo sie wie

$$\frac{1}{|\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}'|^{n-2}} \text{ für } n > 2 \quad \text{bzw.} \quad \log|\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}'| \text{ für } n = 2$$

endlich wird; dabei bedeuten $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{y}'$ geeignete mit $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ affin verwandte ektoren. Liegt $\mathfrak{x}$ auf $\mathfrak{k}$, so ist $G = 0$. Für jede in $\mathfrak{R}$ reguläre und auf $\mathfrak{k}$ noch tegrierbare Lösung $u(x)$ von (2) gilt dann

$$u(\mathfrak{y}) = \int_{\mathfrak{k}} \frac{\partial G}{\partial n} u(\mathfrak{x})\, d\omega,$$

[3]) G. Faber, Über polynomische Entwicklungen. Math. Ann. **57** (1903), S. 389; (1907), S. 116.

wenn die Bildung der Normalableitung und die Integration über die Oberfläche $\mathfrak{k}$ von $\mathfrak{K}$ auf die Variablenreihe $\mathfrak{x}$ bezogen wird.

Die Greensche Funktion setzt sich aus zwei Teilen zusammen:

$$G(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = G_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + G_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}),$$

einem für $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$ gemäß (5) unendlich werdenden Teil G_1 und einem überall beschränkten G_2. Man erhält den ersteren Teil durch den Ansatz

$$G_1 = \frac{\alpha_{n-2}}{|\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}'|^{n-2}} + \frac{\alpha_{n-3}}{|\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}'|^{n-3}} + \cdots + \alpha_1 \cdot |\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}'| + \beta \log |\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}'|,$$

wobei die Konstanten α_ν und β so zu bestimmen sind, daß $\overline{L}[G_1]$ im Punkte $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$ endlich bleibt; $\overline{L}$ bedeutet die zu (2) adjungierte Differentialgleichung. Der andere Teil G_2 muß dann der Differentialgleichung

$$\overline{L}[G_1] = -\overline{L}[G_2]$$

genügen und solche Randwerte annehmen, daß G am Rande verschwindet.

Die Normalableitung $\frac{\partial G_1}{\partial n}$ hinsichtlich der Variablenreihe $\mathfrak{x}$ ist am Rande von $\mathfrak{K}$ gleichmäßig in $\mathfrak{y}$ beschränkt, wenn $\mathfrak{y}$ einem abgeschlossenen inneren Teilgebiet $\mathfrak{K}'$ von $\mathfrak{K}$ angehört. Das gleiche gilt für die Tangentialableitungen von G_1 und folglich auch für die von G_2. Da G_2 einer elliptischen Differentialgleichung genügt, ist auch die Normalableitung von G_2 hier beschränkt. Es gibt also eine nur von $\mathfrak{K}'$ abhängige Konstante $M(\mathfrak{K}')$, so daß für alle $\mathfrak{y}$ in $\mathfrak{K}'$

$$\left|\frac{\partial G}{\partial n}\right| < M(\mathfrak{K}') \tag{7}$$

gilt.

Die Benutzung der Voraussetzung, daß die Greensche Funktion existiert, ist aus zwei Gründen bedauerlich. Erstens stehen über die Existenz der Greenschen Funktion abschließende Sätze noch aus. Zweitens läßt ein wesentlicher Teil der Beweisanordnung vermuten, daß man gerade auf diesem Wege die Frage nach der Lösbarkeit der ersten Randwertaufgabe angreifen und somit die Existenz der Greenschen Funktion von hier aus begründen könnte[4]).

Die Ungleichung (3) der zweiten Voraussetzung steht im engen Zusammenhang mit der vierten. Man weiß, daß es für $C > 0$ Gebiete geben kann, in denen eine reguläre Lösung von (2) existiert, die auf dem Rande identisch

[4]) Hierzu ist zu bemerken, daß der zitierte Hopfsche Beweis im Gegensatz zu anderen die Lösung der ersten Randwertaufgabe nicht voraussetzt.

erschwindet; Beispiele kennt man bereits für die Differentialgleichung $\Delta u + u = 0$. In einem solchen Falle kann G jedenfalls nicht existieren. Gilt jedoch (3), so ist man vor dieser Möglichkeit sicher[5]).

3. Die Übertragung der Konvergenz vom Rande ins Gebietsinnere.

Die Behauptung I werde als richtig angenommen und die Funktionen $q_\nu(x)$ gebildet, wie in II angegeben ist. Die Teilsummen der Orthogonalentwicklung von u nach den q_ν

$$U_\mu(x) = \sum_{\nu=1}^{\mu} \alpha_\nu q_\nu(x) \tag{8}$$

konvergieren dann auf $\mathfrak{g}$ im Mittel gegen $u(x)$. Diese Funktionen werden nun durch die Formel (6) ins Innere von $\mathfrak{G}$ fortgesetzt. Nach der Ungleichung (7), angewandt auf $\mathfrak{G}$ an Stelle von $\mathfrak{K}$, gilt dann gleichmäßig für y in einem inneren Teilgebiet $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}$:

$$|U_\mu(\mathfrak{y}) - u(\mathfrak{y})| = \left| \int_{\mathfrak{g}} \frac{\partial G}{\partial n} \big(U_\mu(x) - u(x)\big)\, d\omega \right| < M(\mathfrak{G}') \int_{\mathfrak{g}} |U_\mu(x) - u(x)|\, d\omega$$

$$\leqq M(\mathfrak{G}') \sqrt{\int_{\mathfrak{g}} d\omega \cdot \int_{\mathfrak{g}} (U_\mu(x) - u(x))^2\, d\omega},$$

woraus sich die Behauptung bereits ergibt.

Das erhaltene Ergebnis wird für $\mathfrak{K}$ an Stelle von $\mathfrak{G}$ gleich im folgenden Abschnitt bei dem Beweise der Behauptung I benutzt, wenn auch nicht in vollem Umfange. Es würde nämlich genügen, nur die mittlere Konvergenz der ins Innere fortgesetzten Folge U_μ zu kennen.

4. Der erste Schritt.

Bei diesem Schritt wird gezeigt: Ist $u(x)$ in $\mathfrak{G}$ regulär, und läßt sich $u(x)$ auf $\mathfrak{g}$ im Mittel durch Ausdrücke der Form

$$U_\mu(x) = \sum_{\nu=1}^{\mu} \beta_{\mu\nu} u_\nu(x)$$

approximieren, so sind die $u_\nu(x)$ auf $\mathfrak{g}$ im Sinne der Behauptung vollständig. Dieser Sachverhalt liegt vor, wenn die in $\mathfrak{G}$ zu approximierende Funktion $u(x)$ sogar in dem weiteren Gebiet $\mathfrak{K}$ noch eine reguläre Lösung von (2) ist. Dann kann man nämlich $u(x)$ nach dem in der Voraussetzung (3) genannten orthogonalen Funktionensystem $p_\nu(x)$ entwickeln. Die Teilsummen der so ent-

[5]) Vgl. etwa COURANT-HILBERT, Methoden der Mathematischen Physik, Bd. 2, Berlin 1937, S. 274–276.

stehenden Reihe, die mit $U_\mu(\mathfrak{x})$ bezeichnet seien, konvergieren auf $\mathfrak{k}$ im Mittel und im Innern von $\mathfrak{K}$ nach dem Ergebnis des vorigen Abschnitts gleichmäßig, also auch im Mittel gegen $u(\mathfrak{x})$.

Für $\mathfrak{g}$ wird das normierte Orthogonalsystem $q_\nu(\mathfrak{x})$ gebildet, durch welches sich die $U_\mu(\mathfrak{x})$ wie folgt darstellen lassen:

$$U_\mu(\mathfrak{x}) = \sum_{\nu=1}^{\mu} \alpha_{\mu\nu}\, q_\nu(\mathfrak{x}). \tag{9}$$

Gleichzeitig mit den U_μ werden die Teilsummen

$$U_\mu^*(\mathfrak{x}) = \sum_{\nu=1}^{\mu} \alpha_\nu\, q_\nu(\mathfrak{x}) \tag{10}$$

der Entwicklung von u nach den q_ν betrachtet, deren Koeffizienten also

$$\alpha_\nu = \int_{\mathfrak{g}} u(\mathfrak{x})\, q_\nu(\mathfrak{x})\, d\omega$$

sind. Es ist die mittlere Konvergenz der Folge (10) gegen u zu beweisen.

Aus den Orthogonalitätsrelationen folgt nun

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\mu} (\alpha_{\mu\nu} - \alpha_\nu)^2 &= \int_{\mathfrak{g}} (U_\mu - U_\mu^*)^2\, d\omega \\ &= \int_{\mathfrak{g}} (U_\mu - u)^2\, d\omega + \int_{\mathfrak{g}} (U_\mu^* - u)^2\, d\omega - 2\int_{\mathfrak{g}} (U_\mu - u)\,(U_\mu^* - u)\, d\omega, \end{aligned} \tag{11}$$

und die Besselsche Ungleichung besagt

$$\sum_{\nu=1}^{\mu} (\alpha_{\mu\nu} - \alpha_\nu)^2 \leqq \int_{\mathfrak{g}} (U_\mu - u)^2\, d\omega. \tag{12}$$

Die rechte Seite von (12) läßt sich aber nach der Voraussetzung durch Vergrößerung von μ unter jede beliebige Schranke ε herabdrücken. Daher gibt (11)

$$\int_{\mathfrak{g}} (U_\mu^* - u)^2\, d\omega + \eta = 2\int_{\mathfrak{g}} (U_\mu - u)\,(U_\mu^* - u)\, d\omega$$

mit einer Zahl η, die ihrem Betrage nach höchstens gleich ε ist. Die hier verglichenen Größen können wegen (12) nicht negativ ausfallen. Dann kann man die Schwarzsche Ungleichung verwenden und erhält

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{g}} (U_\mu^* - u)^2\, d\omega + \eta &\leqq 2\sqrt{\int_{\mathfrak{g}} (U_\mu^* - u)^2\, d\omega \cdot \int_{\mathfrak{g}} (U_\mu - u)^2\, d\omega} \\ &\leqq 2\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\int_{\mathfrak{g}} (U_\mu^* - u)^2\, d\omega}, \end{aligned}$$

was nur für

$$\sqrt{\int_{\mathfrak{g}} (U_\mu^* - u)^2\, d\omega} \leqq \sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon - \eta} \leqq 2\sqrt{\varepsilon}$$

möglich ist. Es strebt also die mittlere Abweichung von U_μ^* von u mit wachsendem μ gegen Null.

Aus dem Bewiesenen ergibt sich die Vollständigkeitsrelation

$$\int_{\mathfrak{g}} u^2 \, d\omega = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\int_{\mathfrak{g}} u \, q_\nu \, d\omega \right)^2, \tag{13}$$

die von jetzt ab im Mittelpunkt der Beweisführung stehen soll.

5. Der zweite Schritt.

In diesem Schritt wird erstens vorausgesetzt, daß in (2)

$$B_1 = \cdots = B_n = C = 0 \tag{14}$$

ist. Zweitens wird $\mathfrak{G}$ als konvex angenommen. Drittens darf ohne weitere Beschränkung der Allgemeinheit der Punkt $\mathfrak{x} = (0, \ldots, 0)$ im Innern von $\mathfrak{G}$ angenommen werden. Die zu approximierende Funktion u sei nur noch in $\mathfrak{G}$ regulär und auf $\mathfrak{g}$ integrierbar.

Ist t eine beliebige reelle Zahl, so genügt wegen (14) zugleich mit $u(\mathfrak{x})$ auch $u(t\,\mathfrak{x})$ der Differentialgleichung (2); die letztere Funktion ist in einem Gebiet $\mathfrak{G}_t$ regulär, das aus allen Punkten $t^{-1}\mathfrak{x}$ besteht, wenn $\mathfrak{x}$ alle Punkte aus $\mathfrak{G}$ durchläuft. Das Gebiet $\mathfrak{G}_1$ stimmt mit $\mathfrak{G}$ überein. Mit abnehmendem t wächst $\mathfrak{G}_t$ an, infolge der Konvexheit von $\mathfrak{G}$ gilt dabei immer

$$\mathfrak{G}_t \supset \mathfrak{G}.$$

Es gibt eine Schranke T von der Art, daß sogar

$$\mathfrak{G}_t \supset \mathfrak{K} \tag{15}$$

ist, wenn nur

$$t < T$$

gilt.

Aber nicht nur für reelle t hat $u(t\,\mathfrak{x})$ einen Sinn, sondern auch für komplexe t eines gewissen Gebietes $\mathfrak{T}$ der komplexen t-Ebene, welches die Strecke $0 \leqq t < 1$ im Innern enthält. Die Gestalt von $\mathfrak{T}$ richtet sich natürlich im einzelnen nach der Gestalt des Gebietes im $2n$-dimensionalen komplexen Zahlenraum mit den komplexen Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$, in das hinein $u(\mathfrak{x})$ analytisch fortgesetzt werden kann.

Für t in dem reellen Intervall $0 \leqq t < T$ läßt sich wegen (15) das im vorigen Abschnitt Bewiesene anwenden. Wenn also

$$\alpha_\nu(t) = \int_{\mathfrak{g}} u(t\mathfrak{x}) \, q_\nu(\mathfrak{x}) \, d\omega \tag{16}$$

gesetzt wird, gilt die Vollständigkeitsrelation

$$\int_{\mathfrak{g}} u(t\mathfrak{x})^2 \, d\omega = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu^2(t). \tag{17}$$

Die durch (16) und die linke Seite von (17) definierten Funktionen hängen nun aber für alle t aus $\mathfrak{T}$ von t analytisch ab. Ferner gilt für alle diese t die Besselsche Ungleichung

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu(t)|^2 \leqq \int_{\mathfrak{g}} |u(tx)|^2 \, d\omega,$$

so daß auch die Reihe auf der rechten Seite von (17) in $\mathfrak{T}$ gleichmäßig konvergiert und daher eine analytische Funktion von t darstellt. Infolgedessen gilt (17) durchweg in $\mathfrak{T}$ und im Grenzwert auch für $t = 1$. In dieser Form sagt aber (17) gerade die behauptete Vollständigkeit der q_ν bzw. der u_ν aus, was zu beweisen war.

6. Der dritte Schritt.

Es bleibt jetzt zu zeigen übrig, wie man den allgemeinen Fall auf den im vorigen Abschnitt behandelten speziellen zurückführen kann. Setzt man zunächst $u = u_1 \cdot v$, wobei v der Differentialgleichung (2) genügt, so erfüllt u_1 eine Differentialgleichung desselben Typs, allein das Glied Cu_1 fehlt. Ebenso mache man für die u_ν den Ansatz $u_{1\nu} \cdot v$. Voraussetzungen und Behauptungen lauten jetzt für u und u_1 gleich, allein dafür hat man Sorge zu tragen, daß v in $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{k}$ nirgends verschwindet. Gibt man für v auf $\mathfrak{k}$ die Werte überall positiv vor, so verschwindet v wegen (3) in der Tat in $\mathfrak{R}$ nirgends[5]). Es darf also von jetzt ab ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit $C = 0$ angenommen werden.

An Stelle der x_i werden ferner neue unabhängige Veränderliche ξ_ν eingeführt. Die Differentialgleichung (2) geht dann in

$$\sum_{\nu,\mu=1}^{n} A'_{\nu\mu} u_{\xi_\nu \xi_\mu} + \sum_{\varrho=1}^{n} B'_\varrho \, u_{\xi_\varrho} = 0$$

über mit

$$A'_{\nu\mu} = \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x_k},$$

$$B'_\varrho = L[\xi_\varrho].$$

Verlangt man also, daß alle ξ_ϱ der Differentialgleichung (2) genügen, so geht (2) in die in (14) angenommene spezielle Gestalt über.

Die noch vorhandene Freiheit bei der Wahl der ξ_ν soll so ausgenutzt werden, daß $\mathfrak{k}$ bei der Transformation $x_i \to \xi_\nu$ auf eine beliebig vorzugebende glatte konvexe Fläche $\mathfrak{k}'$ des ξ_ν-Raumes abgebildet wird, die überall eine positive Gesamtkrümmung haben möge. Die Bestimmung der ξ_ν gemäß dieser Forderung bedeutet die Lösung des ersten Randwertproblems für jede der Funktionen $\xi_\nu(x_1, \ldots, x_n)$ und ist möglich, da die Existenz der Greenschen Funktion vorausgesetzt wurde. Die Abbildung $x_i \to \xi_\nu$ führt nun auch da

Innere $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{k}$ in das Innere $\mathfrak{R}'$ von $\mathfrak{k}'$ über; hierbei muß man beachten, daß die Lösungen ξ_ν der Differentialgleichung (2) mit $C = 0$ sowie sämtliche Linearkombinationen $\Sigma \alpha_\nu \xi_\nu$ Maximum und Minimum nur am Rande annehmen[5]).

Das Gebiet $\mathfrak{G}$ und sein Rand $\mathfrak{g}$ gehen bei dieser Abbildung in ein Gebiet $\mathfrak{G}'$ mit dem Rand $\mathfrak{g}'$ über. Legt man die ξ_ν an Stelle der x_i als unabhängige Variable zugrunde und denkt sich $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{G}$ durch $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{G}'$ ersetzt, so sind jetzt alle Bedingungen für den zweiten Schritt erfüllt, abgesehen eventuell von der Konvexheit von $\mathfrak{G}'$. Ich versuche nun den Beweis des behaupteten Satzes zu Ende zu bringen, indem ich zeige: gilt der Satz im Raume der ξ_ν, so gilt er im Raume der x_i; zweitens: er gilt im Raume der ξ_ν.

Der Erledigung dieser beiden Punkte ist eine Vorbemerkung vorauszuschicken. Die Abbildung $x_i \to \xi_\nu$ ist überall dort topologisch treu, wo die Funktionaldeterminante

$$D = \frac{\partial(\xi_1, \ldots, \xi_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$$

von Null verschieden ist. Sie kann höchstens in einem $(n-1)$-dimensionalen Teil von $\mathfrak{R}$ verschwinden. Wäre sie nämlich in einem n-dimensionalen Teil identisch Null, so würde hier eine Abhängigkeit

$$F(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$$

bestehen. Da nun aber die ξ_ν in $\mathfrak{R}$ analytisch sind, müßte diese Abhängigkeit von analytischer Natur sein und nach dem Prinzip von der Permanenz der Funktionalgleichung überall in $\mathfrak{R}$ bestehen. Infolgedessen würde $\mathfrak{R}$ in ein höchstens $(n-1)$-dimensionales Gebilde übergeführt, was wegen der Stetigkeit der ξ_ν unmöglich ist.

Sorgt man dafür, daß die Abbildung $\mathfrak{k} \to \mathfrak{k}'$ eindeutig ist, so verschwindet die Funktionaldeterminante D im Innern von $\mathfrak{R}$ höchstens an isolierten Punkten: Anderenfalls nämlich würden die Punktmengen von $\mathfrak{R}$, in denen $D = 0$ ist, und die auf je einen Punkt in $\mathfrak{R}'$ abgebildet werden, Mannigfaltigkeiten einer Dimension $h > 0$ sein, die entweder mit $\mathfrak{k}$ mindestens zwei Punkte gemeinsam haben oder in $\mathfrak{R}$ geschlossen sind. Das erstere widerspricht der vorausgesetzten Eindeutigkeit der Abbildung $\mathfrak{k} \to \mathfrak{k}'$. Aber auch das letztere ist nicht möglich; würde nämlich die geschlossene Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^h$ der Dimension $h > 0$ auf den Punkt $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{R}'$ abgebildet werden, so kann nicht $h = n - 1$ sein, denn dann würde das n-dimensionale Innere von $\mathfrak{M}^h$ ebenfalls auf $\mathfrak{P}$ abgebildet. Ist aber $h < n - 1$, so gibt es in $\mathfrak{R}$ eine mit $\mathfrak{M}^h$ verschlungene $(n - h - 1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit: deren Bild in $\mathfrak{R}'$ ist eine höchstens $(n - h - 1)$-dimensionale geschlossene Punktmenge, die wegen der Verschlungenheit ihres Urbildes mit dem Urbild $\mathfrak{M}^h$ von $\mathfrak{P}$ nicht in $\mathfrak{R}'$ auf einen Punkt zusammenziehbar ist, ohne daß dabei der Punkt $\mathfrak{P}$ getroffen

wird. Eine solche Punktmenge kann es aber in $\mathfrak{K}'$ nicht geben, wenn nicht ihre Dimension $n - h - 1 = n - 1$ ist, also $h = 0$, entgegen der Voraussetzung.

Nach dieser Vorbereitung kann nun leicht gezeigt werden: Ist der behauptete Satz im Raume der ξ_ν richtig, so auch im Raume der x_i. Es sei $u(\mathfrak{x})$ eine in $\mathfrak{G}$ reguläre und auf $\mathfrak{g}$ noch integrierbare Lösung von (2). Voraussetzungsgemäß gibt es eine unter Zugrundelegung der Variablen ξ_ν auf $\mathfrak{g}'$ im Mittel gegen u konvergierende Folge

$$U_\mu = \sum_{\nu=1}^{\mu} \alpha_{\mu\nu} u_\nu$$

linearer Aggregate der u_ν. Es ist also

$$\int_{\mathfrak{g}'} (u - U_\mu)^2 \, d\omega' < \varepsilon,$$

sobald nur μ hinreichend groß ist; hierbei bedeute $d\omega'$ das Oberflächenelement von $\mathfrak{g}'$. Der Quotient $\frac{d\omega'}{d\omega}$ zugeordneter Flächenelemente verschwindet nur dort, wo die Funktionaldeterminante D verschwindet, also zufolge des oben Bewiesenen nur in Ausnahmepunkten. Läßt man beliebig kleine Umgebungen um sie aus, was durch einen Akzent am Integralzeichen angedeutet werden möge, so gilt stets

$$\int_{\mathfrak{g}}' (u - U_\mu)^2 \, d\omega = \int_{\mathfrak{g}'}' (u - U_\mu)^2 \frac{d\omega}{d\omega'} \, d\omega'$$

$$\leqq \operatorname{Max}\left(\frac{d\omega}{d\omega'}\right) \int_{\mathfrak{g}'}' (u - U_\mu)^2 \, d\omega' < \operatorname{Max}\left(\frac{d\omega}{d\omega'}\right) \varepsilon.$$

Daraus folgt leicht, daß die Folge U_μ auch auf $\mathfrak{g}$ im Mittel gegen u konvergiert. Die Schlußweise von Nr. 4 stellt dann endlich die Vollständigkeit der u_ν auf $\mathfrak{g}$ in dem besagten Sinne und damit den zu beweisenden Satz sicher.

Die letztere Behauptung, nämlich daß der Satz unter Zugrundelegung der Variablen ξ_ν für das Gebiet $\mathfrak{G}'$ gilt, ist nach Nr. 5 klar, wenn $\mathfrak{G}'$ konvex ist. Jedenfalls trifft sie aber für die konvexe Hülle $\mathfrak{K}_1'$ von $\mathfrak{G}'$ zu und damit nach dem oben Bewiesenen für das Gebiet $\mathfrak{K}_1$, welches auf $\mathfrak{K}_1'$ abgebildet wird. $\mathfrak{K}_1'$ und demnach auch $\mathfrak{K}_1$ haben wiederum einen glatten Rand; die konvexe Hülle eines Gebietes mit glattem Rand muß nämlich ersichtlich selber einen glatten Rand haben. Man kann die Schlußweise wiederholen, indem man $\mathfrak{K}$ durch $\mathfrak{K}_1$ ersetzt und $\mathfrak{K}_1$ in der beschriebenen Weise analytisch auf ein konvexes Gebiet $\mathfrak{K}_1''$ analytisch abbildet. Ist das Bildgebiet $\mathfrak{G}''$ bei dieser Abbildung von $\mathfrak{G}$ konvex, so ist jetzt der Beweis fertig. Andersfalls gilt der Satz für das Gebiet $\mathfrak{K}_2$, das auf die konvexe Hülle $\mathfrak{K}_2''$ von $\mathfrak{G}''$ ab-

gebildet wird. Nun ersetze man $\mathfrak{R}$ durch $\mathfrak{R}_2$ und fahren so fort. Entweder bricht das Verfahren mit einem $\mathfrak{R}_n$ ab, welches gleich $\mathfrak{G}$ ist, oder die Folge $\mathfrak{G}_n$ ist unendlich.

In diesem letzteren Falle behaupte ich

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{R}_n = \mathfrak{G}. \tag{18}$$

Der Beweis ergibt sich leicht aus der folgenden Beobachtung: Der Rand $\mathfrak{k}_1'$ von $\mathfrak{R}_1'$ besteht teilweise aus Punkten von $\mathfrak{g}'$, also besteht auch der Rand $\mathfrak{k}_1$ von $\mathfrak{R}_1$ teilweise aus Punkten von $\mathfrak{g}$. Der Rand $\mathfrak{k}_2$ von $\mathfrak{R}_2$ enthält denselben Teil von $\mathfrak{g}$, der schon in $\mathfrak{k}_1$ enthalten war. Infolge der Glattheit von $\mathfrak{g}''$ ist aber der Durchschnitt $\mathfrak{k}_2' \cap \mathfrak{g}''$ größer als der Durchschnitt $\mathfrak{k}_1' \cap \mathfrak{g}''$ und deshalb auch der Durchschnitt $\mathfrak{k}_2 \cap \mathfrak{g}$ größer als der Durchschnitt $\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{g}$ (man vergleiche die nebenstehende Figur). Die Folge $\mathfrak{R}_n$ setzt sich nun gerade solange fort, wie der Rand $\mathfrak{k}_n$ von $\mathfrak{R}_n$ noch von $\mathfrak{g}$ verschieden ist.

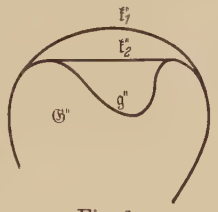


Fig. 1.

Wenn die Folge $\mathfrak{R}_n$ unendlich ist, hat man noch zu beweisen, daß die Vollständigkeit der u_ν auf den Flächen $\mathfrak{k}_n$ bei dem Grenzübergang (18) erhalten bleibt. Zu diesem Nachweis werden auf $\mathfrak{k}_n$ Funktionen $U_n(\mathfrak{x})$ so definiert, daß

$$U_n(\mathfrak{x}) = u(\mathfrak{x})$$

ist in den Punkten $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{k}_n$, die bereits auf $\mathfrak{g}$ liegen, in den übrigen Punkten von $\mathfrak{k}_n$ werde die Definition stetig ergänzt. Es gilt dann in allen Punkten $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{g}$

$$\lim_{n \to \infty} U_n(\mathfrak{x}) = u(\mathfrak{x}); \tag{19}$$

auszunehmen sind höchstens die Punkte von $\mathfrak{g}$, die keinem $\mathfrak{k}$ angehören, jedoch bilden diese ersichtlich eine Menge vom Maß 0. Deshalb gilt (19) auch im Sinne der mittleren Konvergenz.

Da der behauptete Satz für die Gebiete $\mathfrak{R}_n$ bereits bewiesen ist, gibt es Folgen

$$U_{n\mu}(\mathfrak{x}) = \sum_{\nu=1}^{\mu} \alpha_{n\mu\nu} u_\nu(\mathfrak{x}),$$

die auf $\mathfrak{k}_n$ und erst recht auf $\mathfrak{g}$ im Mittel gegen $U_n(\mathfrak{x})$ streben. Eine Diagonalfolge $U_{n\mu(n)}(\mathfrak{x})$ konvergiert deshalb und wegen (19) auf $\mathfrak{g}$ im Mittel gegen $u(\mathfrak{x})$, womit der Beweis endlich fertig ist.

(Eingegangen am 23. Februar 1943.)

Über den Zusammenhang zweier Sätze von Lebesgue und Toeplitz.

Von

Ludwig Neder in Münster (Westf.).

Mit LEBESGUE[1]) nennen wir eine Funktion *einfach unstetig*, wenn sie keine anderen Unstetigkeitspunkte als solche erster Art besitzt. Eine derartige Funktion besitzt höchstens endlich viele Unstetigkeitspunkte mit Schwankung $> \varepsilon > 0$ und ist daher stets (beschränkt und) RIEMANN-integrierbar.

Für diese Funktionen hat LEBESGUE[2]) im Jahre 1909 einen Satz bewiesen, der eine notwendige und hinreichende Bedingung gibt dafür, daß bei einer einfach unstetigen Funktion $f(t)$ für das „singuläre Integral" oder — wie wir dafür lieber sagen wollen — die „Integral-Mittelbildung"

$$I_m = \int_0^l f(t)\, k(t, m)\, dt \text{[3])} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

im Punkte $t = 0$ bei daselbst nach rechts stetigem $f(t)$ die Beziehung folgt

$$\lim_{m = +\infty} I_m = f(0).$$

Da die Stetigkeit nach rechts äquivalent ist mit der Beziehung

$$\lim_{t = +0} f(t) = f(0),$$

so hat LEBESGUE damit den folgenden Satz bewiesen:

Satz 1. *Damit bei beliebig gegebener einfach unstetiger Funktion $f(t)$ aus der Beziehung*

$$\lim_{t = +0} f(t) = L \text{ stets folgt } \lim_{m = +\infty} I_m = L,$$

sind folgende drei Bedingungen notwendig und hinreichend:

$$\lim_{m = +\infty} \int_c^l k(t, m)\, dt = 0 \quad \text{für} \quad 0 < c < l, \tag{1}$$

$$\lim_{m = +\infty} \int_0^l k(t, m)\, dt = 1, \tag{2}$$

[1]) H. LEBESGUE, Sur les integrales singulières. Annales de la Fac. des Sc. de l'Univ. de Toulouse (3) **1** (1909), S. 25. Vgl. S. 59.

[2]) A. a. O.[1]). Vgl. S. 70, wo wir $x = 0$ setzen.

[3]) Der „Kern" $k(t, m)$ sei etwa summierbar nach LEBESGUE.

$$\int_0^l |k(t,m)|\,dt \leqq M, \text{ gleichmäßig für } m = 1, 2, 3, \ldots . \tag{3}$$

Im Jahre 1911, also zwei Jahre später, hat TOEPLITZ[4]) den folgenden Satz bewiesen, der sich bezieht auf den Begriff der „linearen Mittelbildung“

$$t_m = \sum_{n=1}^{\infty} k_{m,n} s_n \quad (m = 1, 2, 3, \ldots):$$

Satz 2. *Damit bei beliebig gegebener Folge s_n aus der Beziehung*

$$\lim_{n=+\infty} s_n = L \text{ stets folgt } \lim_{m=+\infty} t_m = L,$$

sind folgende drei Bedingungen notwendig und hinreichend

$$\lim_{m=+\infty} \sum_{\nu=1}^{n} k_{m,\nu} = 0 \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots [5]), \tag{4}$$

$$\lim_{m=+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} k_{m,n} = 1, \tag{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |k_{m,n}| \leqq M, \quad \text{gleichmäßig für } m = 1, 2, 3, \ldots . \tag{6}$$

Jedem, der sich über die weitgehende Analogie zwischen Reihen und Integralen im klaren ist, muß sogleich die (in unserer Formulierung) große Ähnlichkeit zwischen den beiden Sätzen auffallen[6]).

Darüber hinausgehend wollen wir hier sogar zeigen, daß *Satz 2 eine unmittelbare Folge des Satzes* 1 ist.

---

[4]) O. TOEPLITZ, Über allgemeine lineare Mittelbildungen. Prace mat.-fiz. **22** (1911), S. 113; vgl. auch H. STEINHAUS, Kilka słów ... (polnisch). Ebenda, S. 121.

[5]) TOEPLITZ hat hier die äquivalente Bedingung

$$\lim_{m=+\infty} k_{m,n} = 0 \quad \text{für} \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

[6]) Einer brieflichen Mitteilung des Herrn K. KNOPP entnehme ich die folgenden weiteren Literaturangaben: I. SCHUR hat zuerst auf einen Zusammenhang des TOEPLITZschen Satzes mit den Sätzen von LEBESGUE hingewiesen. Vgl. seine Arbeit: Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen. Journ. f. d. r. u. a. Math. **151** (1921), S. 79. Dann hat H. HAHN eine größere Arbeit geschrieben, in der die Sätze von LEBESGUE, TOEPLITZ, SCHUR usw. aus einer gemeinsamen Quelle hergeleitet werden: Über Folgen linearer Operationen. Monatsh. f. Math. u. Phys. **32** (1922), S. 3. Endlich wäre noch H. RAFF zu nennen, der die Familie der (beschränkten) nach RIEMANN integrierbaren Funktionen ausführlich behandelt: Lineare Transformationen beschränkter integrierbarer Funktionen. (Erste Mitt.) Math. Zeitschr. **41** (1936), S. 605. Jedoch ist, wie Herr KNOPP betont, an keiner dieser Stellen — und anscheinend auch sonst nirgends — klar gesagt worden, daß der TOEPLITZsche Satz eine unmittelbare Folge des LEBESGUEschen ist.

Man braucht, um dies einzusehen, bei einer vorgelegten linearen Mittelbildung und beliebig gegebener Folge s_n mit

$$\lim_{n=+\infty} s_n = L$$

nur zu setzen $l = 1$ und weiter

$$f(t) = s_n \text{ und } k(t,m) = k_{m,n}\, n(n+1) \text{ für } \frac{1}{n+1} < t \leqq \frac{1}{n} \; (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Dadurch erreicht man, daß $f(t)$ eine einfach unstetige Funktion mit

$$\lim_{t=+0} f(t) = L$$

und daß

$$\int_{1:(n+1)}^{1:n} k(t,m)\,dt = k_{m,n},$$

$$\int_{1:(n+1)}^{1:n} |k(t,m)|\,dt = |k_{m,n}|, \qquad \int_{1:(n+1)}^{1:n} f(t)\,k(t,m)\,dt = k_{m,n}\,s_n$$

wird. Dann ist beispielsweise

$$\int_0^1 k(t,m)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{1:(n+1)}^{1:n} = \sum_{n=1}^{\infty} k_{m,n},$$

und auch die beiden anderen Bedingungen des Satzes 1 und die entsprechenden Bedingungen des Satzes 2 decken sich, so daß auch schließlich

$$I_m = t_m$$

wird. W. z. b. w.

(Eingegangen am 20. April 1943.)

Ganze Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$.

Von

H. Wittich, Göttingen.

Herr Rellich sprach im Laufe einer Unterhaltung über die ganzen Lösungen von Differentialgleichungen die Vermutung aus, daß die Differentialgleichung $\Delta u = e^u$ keine ganzen Lösungen zuläßt. Die Richtigkeit dieser Vermutung soll in den folgenden Zeilen dargetan werden. Unter einer „ganzen Lösung" wird dabei eine Funktion $u = u(x, y)$ verstanden, die durch eine für alle endlichen x, y konvergente Potenzreihe $\sum_{\varkappa, \lambda = 0}^{\infty} a_{\varkappa\lambda} x^\varkappa y^\lambda$ darstellbar ist.

1. Wir gehen von der etwas allgemeineren Differentialgleichung

$$\Delta u = f(u) \tag{1}$$

aus; dabei soll die Funktion $f(\zeta)$ für $-\infty < \zeta < \infty$ eindeutig erklärt und zweimal stetig differenzierbar sein. Weiter sei noch $f(\zeta) > 0$ und $f''(\zeta) > 0$ erfüllt. $f(\zeta)$ ist also eine für alle endlichen ζ positiv konvexe[1]) Funktion. $u = u(x, y) = u(z)$ sei eine im Kreise $|z| = |x + iy| < R$ eindeutig erklärte und zweimal stetig differenzierbare Lösung von (1). Unter einer zusätzlichen Annahme über das Anwachsen von $f(\zeta)$ wird gezeigt, daß es keine Funktion $u(z)$ gibt, die die angegebenen Eigenschaften für *alle* endlichen z aufweisen kann. d. h. es muß $R < \infty$ sein. Aus $f(u) > 0$, also $\Delta u > 0$, folgt, daß $u(z)$ in $|z| < R$ subharmonisch ist. Daß es subharmonische Funktionen gibt, die für alle endlichen z eindeutig und zweimal stetig differenzierbar sind, zeigen einfache Beispiele, etwa $u(x, y) = e^{x^2 + y^2}$ mit $\Delta u = 4(1 + x^2 + y^2)\, e^{x^2 + y^2} > 0$. Der Zusammenhang der Aufgabe mit der Theorie der subharmonischen Funktionen[2]) legt die Einführung des Mittelwertes $I(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\varphi})\, d\varphi$ nahe. $I(r)$ nimmt mit wachsendem r nicht ab und ist konvex in $\log r$.

[1]) Konvex bedeutet hier immer im strengen Sinne konvex, also $f'' > 0$.

[2]) F. Riess, Über subharmonische Funktionen und ihre Rolle in der Funktionentheorie und in der Potentialtheorie. Acta Univ. Franc.-Jos. Szeged **2** (1925), S. 87–100.

2. Für den Kreis $|z| \leqq r < R$ setzen wir die Greensche Formel $\iint\limits_{|z| \leqq r} (U \Delta V - V \Delta U)\, dx\, dy = \int\limits_{|z|=r} \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n}\right) ds$, n äußere Normale, für $U = u$, $V = 1$ an und erhalten

$$\iint\limits_{|z| \leqq r} \Delta u\, dx\, dy = \int\limits_{|z|=r} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds; \tag{2}$$

wegen $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$ folgt

$$\int\limits_0^r \int\limits_0^{2\pi} \Delta u\, r\, dr\, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r}\, r\, d\varphi = r \frac{\partial}{\partial r} \int\limits_0^{2\pi} u\,(re^{i\varphi})\, d\varphi \tag{2'}$$

oder nach (1)

$$r \frac{dI(r)}{dr} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^r \int\limits_0^{2\pi} \Delta u\, r\, dr\, d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^r \int\limits_0^{2\pi} f\left(u(re^{i\varphi})\right) r\, dr\, d\varphi. \tag{3}$$

Dabei ist wegen der angegebenen Voraussetzungen $I(r)$ für alle $r < R$ eindeutig erklärt und sicher zweimal stetig differenzierbar. Aus (3) folgt durch Differentiation nach r

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\left(r\, I'(r)\right) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(u)\, d\varphi. \tag{4}$$

Da $f(\zeta)$ für alle endlichen ζ konvex ist, gestattet die rechte Seite von (4) die Abschätzung $\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(u)\, d\varphi \geqq f\left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u\, d\varphi\right) = f\left(I(r)\right)$. Damit erhalten wir aus (4)

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\left(r I'(r)\right) \geqq f\left(I(r)\right). \tag{5}$$

Aus (3) ersieht man, daß $I(r)$ mit r wächst. Die Tatsache, daß $I(r)$ in $\log r$ konvex ist, folgt aus (5). Dazu führen wir $t = \log r$ als neue Veränderliche ein und setzen $I(r) = I(e^t) = m(t)$; $m(t)$ ist also für $-\infty < t < \log R$ erklärt. Wegen $\dot{m}(t) = \frac{dm}{dt} = \frac{dI}{dr} \frac{dr}{dt} = I' \cdot e^t$, $\ddot{m}(t) = r \frac{d}{dr}(rI')$ erhalten wir $\frac{1}{r} \frac{d}{dr}\left(rI'(r)\right) = \frac{\ddot{m}}{r^2} = e^{-2t}\, \ddot{m}(t)$. Aus (5) ergibt sich also

$$\frac{d^2}{dt^2} m(t) \geqq e^{2t} f\left(m(t)\right). \tag{6}$$

Da die rechte Seite von (6) stets positiv ausfällt, ist $m(t)$ konvex in t, also $I(r)$ konvex in $\log r$. Aus (6) lassen sich nun sofort Aussagen über die möglichen Lösungen von (1) gewinnen.

Zunächst gilt für alle $t \geqq t_0 > -\infty$

$$\ddot{m}(t) \geqq e^{2t_0} f(m(t))$$

der nach Multiplikation mit $2\dot{m}(t) > 0$

$$2\dot{m}(t)\ddot{m}(t) = \frac{d\dot{m}^2}{dt} \geqq 2e^{2t_0}\dot{m} f(m(t)) = \frac{d}{dt} F(m(t)),$$

lso

$$\frac{d\dot{m}^2}{dt} \geqq \frac{d}{dt} F(m(t)) \tag{7}$$

it $F(m(t)) = 2e^{2t_0} \int_{m(t_0)}^{m(t)} f(\mu)\, d\mu$. Integration nach t ergibt $\dot{m}^2(t) - \dot{m}^2(t_0) \geqq F(m(t)) - F(m(t_1))$ mit $t_1 > t_0$ oder

$$\dot{m}^2(t) \geqq F(m(t)) + c. \tag{8}$$

8) gilt für alle t mit $t_1 < t < \log R$, und für diese t-Werte ist die rechte Seite ositiv, die durch (8) gegebene Aussage also nicht trivial. Aus (8) folgt

$$\frac{d}{dt} m(t) \geqq \sqrt{F(m(t)) + c} \tag{9}$$

der durch Integration nach t mit der unteren Grenze $t^* > t_1$

$$t - t^* \leqq \int_{m(t^*)}^{m(t)} \frac{dm}{\sqrt{F(m) + c}} < \int_{m(t^*)}^{\infty} \frac{dm}{\sqrt{F(m) + c}},$$

$$t < t^* + \int_{m(t^*)}^{\infty} \frac{dm}{\sqrt{F(m) + c}}. \tag{10}$$

Aus (10) folgt der

Satz. *In der Differentialgleichung $\Delta u = f(u)$ genüge die Funktion $f(\zeta)$ den folgenden Bedingungen*: 1) *$f(\zeta)$ ist zweimal stetig differenzierbar und positiv konvex für alle endlichen ζ*, 2) *$f(\zeta)$ wachse so schnell an, daß das Integral* $\int^{\infty} \frac{dx}{\left(\int^{x} f(\zeta)\, d\zeta\right)^{1/2}}$ *einen endlichen Wert hat. Dann gibt es keine Lösung $u(z)$ der Differentialgleichung $\Delta u = f(u)$, die für alle endlichen z zweimal stetig differenzierbar ist.*

Aus diesem Satz folgt sofort, daß $\Delta u = e^u$ keine ganze Lösung haben kann.

3. Man kann sich nun fragen, ob die Voraussetzung 2) in der Formulierung des Satzes nicht ausschließlich durch die weniger guten Abschätzungen, die zu (10) führten, bedingt ist, also allein auf Konto Beweistechnik geht. Daß dem nicht so ist, zeigt das in 1. angeführte Beispiel $u(x, y) = e^{x^2+y^2}$. Wir bilden dazu die Funktion

$$H(\zeta) = \begin{cases} 4\zeta + 4\zeta \log \zeta & \text{für} \quad \zeta \geqq 1, \\ \dfrac{4 + 4\zeta + 2\zeta^2 + 120\zeta^2 - 54\zeta^4}{19} & \text{,,} \quad 0 \leqq \zeta \leqq 1, \\ \dfrac{4}{19} e^{\zeta} & \text{,,} \quad \zeta \leqq 0. \end{cases} \tag{11}$$

Man rechnet leicht nach, daß $H(\zeta)$ für alle endlichen ζ zweimal stetig differenzierbar und positiv konvex ist $(H''(\zeta) > 0)$. Da die Funktion $u = e^{x^2+y^2}$ stets $\geqq 1$ ist, hat die Differentialgleichung

$$\Delta u = H(u) \tag{12}$$

in $e^{x^2+y^2}$ eine für alle endlichen x, y zweimal stetig differenzierbare Lösung. Dieses Beispiel zeigt also, daß der Satz falsch ist, wenn man die Bedingung 2) streicht[3]).

[3]) Ob man die Bedingungen 1) und 2) des Satzes, insbesondere die Konvexität, durch andere ersetzen kann, wurde nicht untersucht. Daß die Forderung $f(\zeta) > 0$ allein nicht genügt, zeigt ebenfalls das in 3. angegebene Beispiel.

(Eingegangen am 17. April 1943.)

Zur Reduktion von Bewegungsgleichungen auf die Lagrangesche Form.

Von

Herbert Bilharz in Braunschweig*).

1. Es sei $t \geqq 0$ die unabhängige Variable, n eine natürliche Zahl und ein System von n linearen, nicht notwendig homogenen, gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit von t abhängigen Koeffizienten gegeben; wir schreiben es als Matrixgleichung:

$$\mathfrak{Q}\ddot{\mathfrak{q}} + \mathfrak{M}\dot{\mathfrak{q}} + \mathfrak{N}\mathfrak{q} = \mathfrak{P}. \tag{1}$$

Auf derartige Differentialgleichungssysteme wird man bei zahlreichen Untersuchungen von konservativen und nicht-konservativen holonomen, dynamischen Systemen von n Freiheitsgraden geführt; in (1) bezeichnen dann t die Zeitvariable, $\mathfrak{q}(t)$ den generalisierten Lagenvektor des Systems und $\dot{\mathfrak{q}} = \frac{d\mathfrak{q}}{dt}$ die Lagengeschwindigkeit. Als Beispiele seien angeführt die harmonischen und quasi-harmonischen freien oder erzwungenen Schwingungen um eine Gleichgewichtslage oder um einem sogenannten stationären Bewegungszustand. In diesen Fällen sind die Koeffizienten in (1) konstant oder sonst periodische Funktionen von t.

In der vorliegenden Note werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben werden, daß ein solches System von Bewegungsgleichungen einem Lagrangeschen System äquivalent ist, d. h. daß die Bewegungsgleichungen (1) nach Multiplikation mit einer geeignet gewählten nichtsingulären und im allgemeinen von t abhängigen Matrix sich als Lagrangesche Gleichungen zweiter Art

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

schreiben lassen[1]).

Weil (2) die Eulerschen Gleichungen des Variationsprinzips

$$\int L\,dt = \text{Extrem.} \tag{3}$$

*) Mitteilung aus dem Institut für Aerodynamik der Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring, Braunschweig.

[1]) Vgl. E. T. Whittaker, Analytische Dynamik der Punkte und starren Körper . 301—303. Berlin 1924.

sind und die Extremalen dieses Variationsproblems ungeändert bleiben bezüglich der Addition eines vollständigen Differentialquotienten $\frac{dG(\mathfrak{q},t)}{dt}$ zur Grundfunktion, braucht $L\,dt$ nur additiv bis auf ein totales Differential eindeutig bestimmt zu werden. Hiervon machen wir fortgesetzt Gebrauch und werden beweisen, daß eine gegebenenfalls existierende LAGRANGEsche Funktion $L = L(\dot{\mathfrak{q}}, \mathfrak{q}, t)$ eine binäre quadratische Funktion in $\dot{\mathfrak{q}}$ und $\mathfrak{q}$ mit von t abhängigen Koeffizienten sein muß.

2. Für $n = 1$ läßt sich nach JACOBI[2]) unsere Aufgabe auf die Bestimmung eines letzten Multiplikators zurückführen und ist mit der dem Multiplikator eigenen Mehrdeutigkeit stets lösbar; in allem Folgenden kann daher $n > 1$ angenommen werden. Ein konkretes Beispiel wird später erkennen lassen, daß bereits für $n = 2$ nicht immer ein L zu existieren braucht, d. h. es gibt Bewegungen, deren Raumzeitlinien $\mathfrak{q}(t)$ nicht die Extremaleigenschaft (3) haben. Da in der Mechanik konservativer holonomer Systeme das zu (3) äquivalente HAMILTONsche Prinzip für die Raumzeitlinien[3]) an die Spitze aller Betrachtungen gestellt werden kann, ist klar, daß die soeben erwähnten Bewegungen zu nicht-konservativen Systemen gehören. Andererseits werden wir an einem Beispiel zeigen, daß es auch für $n > 1$ in nicht-konservativen Systemen Bewegungen geben kann, deren Raumzeitlinien die Extremaleigenschaft (3) besitzen; dieses Ergebnis scheint bisher unbeachtet geblieben zu sein.

Die Koeffizienten $\mathfrak{Q}(t)$, $\mathfrak{M}(t)$ in (1) seien mindestens einmal stetig differentiierbar, $\mathfrak{N}(t)$, $\mathfrak{P}(t)$ stetig oder mindestens integrierbar und $\mathfrak{Q}$ nicht singulär, also

$$\det. \mathfrak{Q}(t) \neq 0. \tag{4}$$

Wegen der letzten Voraussetzung ist (1) nach dem Beschleunigungsvektor $\ddot{\mathfrak{q}}$ auflösbar:

$$\ddot{\mathfrak{q}} = \mathfrak{Q}^{-1}(\mathfrak{P} - \mathfrak{M}\dot{\mathfrak{q}} - \mathfrak{N}\mathfrak{q}). \tag{5}$$

[2]) C. G. J. JACOBI, Vorlesungen über Dynamik. Ges. Werke, Supplementband, S. 84—85. Berlin 1884.

[3]) Es lautet

$$\int H\,dt = \text{Extrem.} \quad \text{oder} \quad \delta \int H\,dt = 0.$$

H ist die Summe aus der kinetischen Energie T und der potentiellen Energie V, die LAGRANGEsche Funktion L wird gleich der freien Energie $T - V$; eventuell vorhandene gyroskopische Bestandteile denken wir in V untergebracht. Für nicht-konservative Systeme tritt an Stelle von $\delta \int H\,dt = 0$ die Gleichung

$$\delta \int T\,dt + \int \delta A\,d\,t = 0.$$

Im letzten Integral ist die virtuelle Arbeit wohldefiniert und es gilt im allgemeinen

$$\int \delta A\,dt \neq \delta \int A\,dt;$$

die Gleichheit tritt nur ein, wenn die momentane Arbeit dA ein vollständiges Differential ist.

Für die Lagrange-Funktion $L(\dot{\mathfrak{q}}, \mathfrak{q}, t)$ machen wir mit nach t stetig differentiierbaren[4]) Koeffizienten $\mathfrak{A}(t), \ldots, \mathfrak{F}(t)$ den später zu rechtfertigenden Ansatz:

$$L \equiv \tfrac{1}{2}\dot{\mathfrak{q}}'\mathfrak{A}\dot{\mathfrak{q}} + \dot{\mathfrak{q}}'\mathfrak{B}\mathfrak{q} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{q}'\mathfrak{C}\mathfrak{q} + \dot{\mathfrak{q}}'\mathfrak{D} + \mathfrak{q}'\mathfrak{F}, \tag{6}$$

wobei ein Schrägstrich (') an einer Matrix ihre Transponierte kennzeichnet. Die Matrizen $\mathfrak{A}(t)$ und $\mathfrak{C}(t)$ können symmetrisch angenommen werden:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}', \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{C}'. \tag{7}$$

Überdies sei $\mathfrak{A}$ nicht singulär:

$$\boxed{\det \mathfrak{A}(t) \neq 0.} \tag{8}$$

Für dieses L lauten die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art

$$[\mathfrak{A}\dot{\mathfrak{q}} + \mathfrak{B}\mathfrak{q} + \mathfrak{D}]^{\cdot} - [\mathfrak{B}'\dot{\mathfrak{q}} + \mathfrak{C}\mathfrak{q} + \mathfrak{F}] = (0), \tag{9}$$

oder ausgerechnet

$$\mathfrak{A}\ddot{\mathfrak{q}} + (\dot{\mathfrak{A}} + \mathfrak{B} - \mathfrak{B}')\dot{\mathfrak{q}} + (\dot{\mathfrak{B}} - \mathfrak{C})\mathfrak{q} + \dot{\mathfrak{D}} - \mathfrak{F} = (0). \tag{10}$$

Wenn (1) zu (2) mit L aus (6) äquivalent sein soll, muß nach Einführung von $\ddot{\mathfrak{q}}$ aus (5) das Gleichungssystem (10) in $\dot{\mathfrak{q}}$, $\mathfrak{q}$ und den hiervon freien Gliedern identisch erfüllt werden. Daraus folgen nachstehende Identitäten in t:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{M} = \dot{\mathfrak{A}} + \mathfrak{B} - \mathfrak{B}', \tag{11}$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{N} = \dot{\mathfrak{B}} - \mathfrak{C}, \tag{12}$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{P} = \mathfrak{F} - \dot{\mathfrak{D}}. \tag{13}$$

Wegen (7_1) liefert (11)

$$\boxed{2\,\dot{\mathfrak{A}} = (\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{M})'\,\mathfrak{A} + \mathfrak{A}\,(\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{M}).} \tag{14}$$

Bei Berücksichtigung von (14) und (7_2) erhalten wir aus (12)

$$\boxed{[(\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{M})'\,\mathfrak{A} - \mathfrak{A}(\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{M})]^{\cdot} = 2\,[(\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{N})'\,\mathfrak{A} - \mathfrak{A}(\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{N})].} \tag{15}$$

Für die $\binom{n+1}{2}$ Elemente $A_{jk}(t)$ der symmetrischen Matrix $\mathfrak{A}$ ergeben sich danach $n^2 + 1$ notwendige Bedingungen, nämlich (8) (das Nichtverschwinden ihrer Determinante), $\binom{n+1}{2}$ lineare Differentialgleichungen erster Ordnung des symmetrischen Systems (14) und $\binom{n}{2}$ ebensolche Gleichungen des schiefsymmetrischen Systems (15).

[4]) Genauer wird nur benötigt werden, daß die Matrizen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ mindestens einmal stetig differentiierbar sind, während $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{F}$ nur stetig oder zumindest integrierbar nach t zu sein brauchen.

Diese für die Existenz einer Lagrange-Funktion (6) notwendigen Bedingungen sind auch hinreichend. Ist die nichtsinguläre symmetrische Matrix $\mathfrak{A}(t)$ derart bestimmt, daß sie den Systemen (14) und (15) genügt und wird

$$\overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B} + \mathfrak{B}', \quad \underline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B} - \mathfrak{B}' \tag{16}$$

gesetzt, so erfüllt

$$\tfrac{1}{2}\,[\mathfrak{A}\,(\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{M}) - (\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{M})'\,\mathfrak{A}] = \underline{\mathfrak{B}} \tag{17}$$

das Gleichungssystem (11). Nach Vorgabe einer stetigen symmetrischen Matrix $\mathfrak{C}(t)$ folgt durch Integration nach t aus

$$2\,\mathfrak{C} + (\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{N})'\,\mathfrak{A} + \mathfrak{A}(\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{N}) = \dot{\overline{\mathfrak{B}}} \tag{18}$$

ein $\overline{\mathfrak{B}}$ und damit wegen (16) und (17) eine dem System (12) genügende Matrix $\mathfrak{B}(t)$. Schließlich ergibt sich bei Vorgabe eines stetigen Vektors $\mathfrak{F}(t)$ ein das System (13) befriedigender Vektor $\mathfrak{D}(t)$ durch Integration von $\mathfrak{F} - \mathfrak{A}\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{P}$ nach t[5]). Hiermit ist unsere Behauptung bewiesen und wir können folgenden Satz aussprechen:

Satz 1. *Das vorgegebene System* (1) *von* $n > 1$ *gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung ist dann und nur dann dem* Lagrange*schen System* (2) *mit* L *aus* (6) *äquivalent, wenn sich* $\binom{n+1}{2}$ *stetig differentiierbare Funktionen* $A_{jk}(t) = A_{kj}(t)$ *mit nichtverschwindender Determinante bestimmen lassen, welche simultan den* n^2 *Bedingungen* (14) *und* (15) *genügen.*

Ist das Ausgangssystem (1) homogen, also von der Gestalt

$$\mathfrak{Q}\ddot{\mathfrak{q}} + \mathfrak{M}\dot{\mathfrak{q}} + \mathfrak{N}\mathfrak{q} = (0), \tag{19}$$

so ergeben sich für $\mathfrak{A}(t)$ genau dieselben Bestimmungsgleichungen wie zuvor; in (13) kann $\mathfrak{F} = \mathfrak{D} \equiv (0)$ gewählt werden, und L wird eine binäre quadratische *Form* in $\dot{\mathfrak{q}}$ und $\mathfrak{q}$.

Damit die Lösungen von (1) bzw. (19) Extremalen eines *regulären* Variationsproblems sind, ist noch die Definitheit der quadratischen Form $\dot{\mathfrak{q}}'\,\mathfrak{A}\,\dot{\mathfrak{q}}$ in (6) vorauszusetzen, also zu fordern, daß $\det.\,\mathfrak{A}$ und alle ihre Hauptunterdeterminanten gleiche Vorzeichen haben für $t \geqq 0$.

3. Gleichungssysteme (1) bzw. (19), für welche ein $\mathfrak{A}(t)$ nach Satz 1 existiert, pflegt man als *selbstadjungiert* zu bezeichnen. Es ist jedoch zu beachten, daß beim Beweis von Satz 1 nirgends der zu

$$I(\mathfrak{q}) \equiv \mathfrak{Q}\ddot{\mathfrak{q}} + \mathfrak{M}\dot{\mathfrak{q}} + \mathfrak{N}\mathfrak{q} \tag{20}$$

[5]) Der Umstand, daß $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{F}$ frei verfügbar bleiben, läßt sich für Rechenvorteile nutzbar machen. (6) wird nur bis auf einen Differentialquotienten $\frac{dG_1(\mathfrak{q},t}{dt}$ eindeutig bestimmt, welchen wir zu $\frac{dG(\mathfrak{q},t)}{dt}$ hinzufügen und daher verabredungsgemäß beiseite lassen können.

djungierte Differentialausdruck

$$\hat{I}(\mathfrak{r}) \equiv (\mathfrak{Q}'\,\mathfrak{r})^{\cdot\cdot} - (\mathfrak{M}'\,\mathfrak{r})^{\cdot} + \mathfrak{N}'\,\mathfrak{r} \tag{21}$$

herangezogen wurde, wo $\mathfrak{r}(t)$ ein zweimal stetig differentiierbarer Vektor sein soll. Nach unseren Voraussetzungen — falls nämlich $\mathfrak{Q}(t)$ genau einmal stetig differentiierbar ist — braucht (21) überhaupt nicht zu existieren.

Wir wollen zeigen, daß die in der Theorie der Differentialgleichungen üblichen Definitionen der Selbstadjungiertheit nur hinreichende Bedingungen ergeben.

Ist $\mathfrak{Q}(t)$ mindestens zweimal stetig differentiierbar, so heißt (I) bzw. (19) *selbstadjungiert im engeren Sinne*[6]), wenn in $\ddot{\mathfrak{q}}$, $\dot{\mathfrak{q}}$ und $\mathfrak{q}$ die Identität

$$I(\mathfrak{q}) \equiv \hat{I}(\mathfrak{q}) \tag{22}$$

besteht. Dafür ist notwendig und hinreichend, daß die Gleichungen

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}', \quad 2\,\dot{\mathfrak{Q}}' = \mathfrak{M} + \mathfrak{M}', \quad \ddot{\mathfrak{Q}}' = \dot{\mathfrak{M}}' - \mathfrak{N}' + \mathfrak{N} \tag{23}$$

identisch in t erfüllt sind.

Wird $\ddot{\mathfrak{Q}}'$ aus der letzten Relation mit Hilfe der beiden vorangehenden eliminiert, so folgt

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}', \quad 2\,\dot{\mathfrak{Q}} = \mathfrak{M} + \mathfrak{M}', \quad [\mathfrak{M} - \mathfrak{M}']^{\cdot} = 2\,[\mathfrak{N} - \mathfrak{N}'], \tag{24}$$

und es gilt in Verbindung mit Satz 1 der folgende

Satz 2. *Zu einem im engeren Sinne selbstadjungierten System* (1) *gibt es eine Lagrange-Funktion* (6) *mit* $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{Q}$. *Die Umkehrung gilt nur unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß* $\mathfrak{Q}(t)$ *mindestens zweimal stetig differentiierbar sei*[7]).

[6]) Terminologie nach E. Kamke, Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen **1** (Leipzig 1942), S. 53—55.

[7]) M. Morse, A generalization of the Sturm Separation and Comparisazion Theorems in n-space, Math. Ann. **103** (1930), S. 52—69, geht von den Relationen (23) aus und erhält in Theorem 1, S. 52—54 unter den dortigen Voraussetzungen zunächst nur eine hinreichende Bedingung, während in The Calculus of Variations in the Large, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **18** (New York 1934), S. 81—83, anstelle der skalaren Beziehung

$$\mathfrak{r}'\,I(\mathfrak{q}) - \mathfrak{q}'\,\hat{I}(\mathfrak{r}) = [\mathfrak{r}'\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{q} + \mathfrak{r}'\,\mathfrak{Q}\,\dot{\mathfrak{q}} - (\mathfrak{r}'\,\mathfrak{Q})^{\cdot}\,\mathfrak{q}]^{\cdot}$$

die Existenz einer Bilinearform $K(\mathfrak{q}, \ldots, \dot{\mathfrak{r}})$ mit mindestens einmal nach t stetig differentiierbaren Koeffizienten gefordert wird, für welche

$$\mathfrak{r}'\,I(\mathfrak{q}) - \mathfrak{q}'\,I(\mathfrak{r}) = \dot{K}$$

identisch an allen vorkommenden Variablen gilt.

Für lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung hat Bliss[8]) den Begriff der Selbstadjungiertheit verallgemeinert. Seine Definition lautet bei Übertragung auf lineare Systeme zweiter Ordnung:

Das Gleichungssystem (1) heißt *selbstadjungiert im weiteren Sinne*[9]), wenn es eine nichtsinguläre, zweimal stetig differentiierbare Matrix $\mathfrak{T}(t)$ mit

$$\mathfrak{Q}'\mathfrak{T} = \mathfrak{T}'\mathfrak{Q} \tag{25}$$

gibt, so daß für $I(\mathfrak{q}) = (0)$ der Vektor

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{T}\mathfrak{q} \tag{26}$$

gerade die Lösungen des Gleichungssystems $\hat{I}(\mathfrak{r}) = (0)$ durchläuft.

Werden die Gleichungssysteme $I(\mathfrak{q}) = (0)$ und $\hat{I}(\mathfrak{T}\mathfrak{q}) = (0)$ jeweils nach $\ddot{\mathfrak{q}}$ aufgelöst und die entsprechenden Koeffizienten von $\dot{\mathfrak{q}}$ und $\mathfrak{q}$ einander gleichgesetzt, so folgen die Identitäten in t:

$$\mathfrak{Q}'\mathfrak{T}\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{M} = 2\,(\mathfrak{Q}'\mathfrak{T})^{\cdot} - \mathfrak{M}'\mathfrak{T}, \tag{27}$$

$$\mathfrak{Q}'\mathfrak{T}\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{N} = (\mathfrak{Q}'\mathfrak{T})^{\cdot\cdot} - (\mathfrak{M}'\mathfrak{T})^{\cdot} + \mathfrak{N}'\mathfrak{T}. \tag{28}$$

Nach einiger Umformung finden wir hieraus

$$2\,(\mathfrak{Q}'\mathfrak{T})^{\cdot} = (\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{M})'\mathfrak{Q}'\mathfrak{T} + \mathfrak{Q}'\mathfrak{T}(\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{M}), \tag{29}$$

$$(\mathfrak{Q}'\mathfrak{T})^{\cdot\cdot} = [(\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{M})'\mathfrak{Q}'\mathfrak{T}]^{\cdot} + (\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{N})'\mathfrak{Q}'\mathfrak{T} - \mathfrak{Q}'\mathfrak{T}(\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{N}). \tag{30}$$

Die Elimination von $(\mathfrak{Q}'\mathfrak{T})^{\cdot\cdot}$ in (30) mit Hilfe von (29) ergibt

$$[(\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{M})'\mathfrak{Q}'\mathfrak{T} - \mathfrak{Q}'\mathfrak{T}(\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{M})]^{\cdot} = 2\,[(\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{N})'\mathfrak{Q}'\mathfrak{T} - \mathfrak{Q}'\mathfrak{T}(\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{N})]. \tag{31}$$

Durch Vergleich von (25), (29) und (31) mit den Formeln (7_1), (14) und (15) erhalten wir den

Satz 3. *Zu einem im weiteren Sinne selbstadjungierten System* (1) *existiert eine Lagrange-Funktion* (6) *mit* $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{Q}'\mathfrak{T}$. *Wie in Satz 2 gilt die Umkehrung nur unter verschärften Bedingungen.*

Während die Definition der Selbstadjungiertheit im engeren Sinne an die vorgegebenen Koeffizienten in (1) gebunden ist, darf bei der Selbstadjungiertheit im weiteren Sinne auch (1) mit einer nichtsingulären zweimal stetig differentiierbaren Matrix $\mathfrak{S}(t)$ erweitert werden. Das derart erweiterte, zu (1) äquivalente System ist dann ebenfalls selbstadjungiert im weiteren Sinne; für die Transformationsmatrix $\mathfrak{U}(t)$ findet man $\mathfrak{U} = \mathfrak{S}'^{-1}\mathfrak{T}$, und

[8]) G. A. Bliss, A boundary value problem for a system of ordinary differential equations of the first order. Trans. Amer. Math. Soc. **28** (1926), S. 561—584, insbes. S. 569ff. Vgl. auch E. Kamke in l. c.[6]), S. 53—55 u. 250—251. Die Symmetriebedingung (25) ist bei Bliss nicht in die Definition aufgenommen.

[9]) Siehe Fußnote 6.

$\mathfrak{Z}\mathfrak{Q})'\mathfrak{U}$ ist mit $\mathfrak{Q}'\mathfrak{T}$ symmetrisch. Für analytische oder mindestens zweimal etig differentiierbare Funktionen $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{T}$ sind die Relationen (25), (29) nd (31) bzw. (7_1), (14) und (15) völlig gleichwertig, wobei die letzteren auch ann einen guten Sinn haben, wenn die zweite Ableitung von $\mathfrak{A}$ gar nicht xistiert. Von den beiden Möglichkeiten, die Selbstadjungiertheit unter uhilfenahme des adjungierten Differentialausdruckes (21) (also mit Benutzung er sogenannten Lagrangeschen Identität) oder vermittels eines Variationsrinzips zu definieren, ist die letztere allgemeiner. Einer analogen Erscheinung egegnet man bei der Definition der kanonischen Transformation, wo von ner Differentialbedingung oder allgemeiner von den Lagrangeschen oder en Poissonschen Klammern ausgegangen werden kann.

4. Es soll nunmehr der Ansatz (6) begründet werden.

Ausgehend von der Annahme, daß für (1) ein L des regulären Extremalntegrals (3) existiere, betrachten wir eine fest gewählte Raumzeitlinie

32) $$\mathfrak{q} = \bar{\mathfrak{q}}(t)$$

on (1) als Grundextremale und die ihr infinitesimal benachbarten Extremalen on (3). Die Funktion

33) $$\delta\mathfrak{q} = \mathfrak{w}(t),$$

elche den Übergang von der Grundextremalen zu einer dieser Nachbarxtremalen vermittelt, bestimmt ihrerseits ein Variationsproblem, das soenannte Jacobische Problem der zweiten Variation:

34) $$\int \bar{L}\,(\dot{\mathfrak{w}}, \mathfrak{w}, t)\,dt = \text{Extrem.},$$

essen Integrand die quadratische Form

35) $$\bar{L} \equiv \tfrac{1}{2}\,\dot{\mathfrak{w}}'\,\mathfrak{A}_1\,\dot{\mathfrak{w}} + \dot{\mathfrak{w}}'\,\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{w} + \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{w}'\,\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{w}$$

st. In den Koeffizienten

36) $$\mathfrak{A}_1 \equiv \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j\,\partial \dot{q}_k}\right), \quad \mathfrak{B}_1 \equiv \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j\,\partial q_k}\right), \quad \mathfrak{C}_1 \equiv \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q_j\,\partial q_k}\right) \qquad (j,k = 1,\ldots,n)$$

on (35) sind $\dot{\mathfrak{q}}$ und $\mathfrak{q}$ als Funktionen von t der Grundextremalen (32) einzuetzen, so daß die zweiten Ableitungen von L bekannte Funktionen von t erden. Die Funktionen (33) sind Lösungen der Euler-Jacobischen Gleihungen

37) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{w}_j}\right) - \frac{\partial \bar{L}}{\partial w_j} = 0 \qquad (j = 1,\ldots,n)$$

es Variationsproblems (34) mit $\bar{L}$ aus (35) und bilden ein homogenes System on n linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Wenn das Ausgangssystem (1), welches wir vorübergehend mit

38) $$V_j(\ddot{\mathfrak{q}}, \dot{\mathfrak{q}}, \mathfrak{q}, t) = 0 \qquad (j = 1,\ldots,n)$$

bezeichnen wollen, äquivalent zu (2) sein soll, so müssen längs der Grundextremalen die Lösungen der Variationsgleichungen

$$\mathfrak{Q}_1 \ddot{\mathfrak{w}} + \mathfrak{M}_1 \dot{\mathfrak{w}} + \mathfrak{N}_1 \mathfrak{w} = (0), \tag{39}$$

deren Koeffizienten

$$\mathfrak{Q}_1 \equiv \left(\frac{\partial V_j}{\partial \dot{q}_k}\right), \quad \mathfrak{M}_1 \equiv \left(\frac{\partial V_j}{\partial \dot{q}_k}\right), \quad \mathfrak{N}_1 \equiv \left(\frac{\partial V_j}{\partial q_k}\right) \quad (j, k = 1, \ldots, n) \tag{40}$$

sind, mit denjenigen des Systems (37) übereinstimmen. Die Wiederholung der Rechnungen aus 2. mit den Gleichungssystemen (37), (39) und der Lagrange-Funktion (35) führt wieder zu den Bedingungen (8), (14) und (15), wobei alle darin vorkommenden Matrizen jetzt einen unteren Index 1 tragen; das System (39) ist selbstadjungiert im Sinne von Satz 1.

Wegen der Linearität des Systems (1) sind aber die Koeffizienten (40) von der Wahl der Grundextremalen unabhängig und gleich denjenigen in (1):

$$\mathfrak{Q}_1 \equiv \mathfrak{Q}, \quad \mathfrak{M}_1 \equiv \mathfrak{M}, \quad \mathfrak{N}_1 \equiv \mathfrak{N}, \tag{41}$$

d. h. auch das System (1) ist selbstadjungiert. Für das Extremalintegral (3) ist dann nach Satz 1 eine Lagrange-Funktion L der Gestalt (6) additiv bis auf eine Funktion $\frac{dG(\mathfrak{q}, t)}{dt}$ bestimmbar.

5. Wir wenden uns für $n = 2$ einigen einfachen Beispielen zu. $\mathfrak{Q}$ sei gleich der Einheitsmatrix und die Matrizen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ ebenfalls unabhängig von t, so daß die Systeme (14) und (15) sogenannte D'Alembertsche Systeme werden. Nach Satz 1 sind zunächst nichtsinguläre symmetrische Lösungen von (14) zu suchen, eventuell genügen Partikularlösungen; falls ein L existiert, müssen diese Lösungen das Differentialgleichungssystem (15) identisch erfüllen.

1. Ein räumliches Pendel bildet bei Berücksichtigung der Erdrotation ein konservatives, kreiselgekoppeltes System. Die Differentialgleichungen der Horizontalbewegung genügen bei geeignet gewählten Koordinaten dem System (1) mit

$$\mathfrak{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{M} = a \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{N} = b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{P} = (0), \tag{42}$$

wobei a und b reelle und von Null verschiedene Konstanten sind. Dieses homogene Gleichungssystem ist nach (24) selbstadjungiert im engeren Sinne und $\mathfrak{A} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ genügt (7$_1$), (8), (14) und (15). Für $\mathfrak{C} = -\mathfrak{N} = \mathfrak{C}'$ kann nach (16) bis (18) die Matrix $\mathfrak{B} = \frac{1}{2}\mathfrak{M}$ gewählt werden; Gleichung (13) wird für $\mathfrak{F} = \mathfrak{D} \equiv (0)$ erfüllt. Mit $G(\mathfrak{q}, t) \equiv 0$ wird nach (6)

$$L \equiv \tfrac{1}{2}\left[\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - a(\dot{q}_1 q_2 - q_1 \dot{q}_2) - b(q_1^2 + q_2^2)\right] \tag{43}$$

ine quadratische Form in $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_2$; die entsprechenden Koeffizienten
n (1) und (2) sind nicht nur einander proportional, sondern sogar identisch
leich.

2. Bei Anwendung der Methode der kleinen Schwingungen auf ein reibungs-
ekoppeltes, holonomes System ist (1) das Differentialgleichungssystem der
achbarbewegung in der Störung $\mathfrak{q}(t)$. Die Koeffizienten sind Funktionen
er Koordinaten und Koordinatengeschwindigkeiten des ungestörten Zu-
tandes, also bezüglich t konstant. $\mathfrak{Q}$ als verkürzte Bewegungsenergie ist
ymmetrisch, ebenso $\mathfrak{M}$ als Koeffizientenmatrix der RAYLEIGHschen Dissi-
ationsfunktion. Wegen $\dot{\mathfrak{Q}} \equiv (0)$ und der Symmetrie von $\mathfrak{M}$ kann nach (24_2)
in solches System nicht selbstadjungiert im engeren Sinne sein. Trotzdem
st es nach Satz 1 möglich, daß eine Lagrange-Funktion L der Gestalt (6)
xistiert; für sie ist allerdings $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{Q}$ und im allgemeinen $\mathfrak{A}$ von t abhängig.
Dieses zeigen die folgenden Beispiele:

2a) Der Kreiselkompaß mit Dämpfung ist ein nicht-konservatives,
eibungsgekoppeltes dynamisches System. a, b_1 und b_2 seien reelle und von
Null verschiedene Konstante mit $b_1 \neq b_2$; c_1 und c_2 seien periodische Funk-
ionen von t. Die Bewegungsgleichungen[10]) haben die Gestalt (1) mit

$$(44) \quad \mathfrak{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{M} = a \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{N} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{P} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Sind α, β und γ beliebige reelle Integrationskonstanten, so genügt die all-
gemeinste symmetrische Lösung von (14)

$$(45) \quad \mathfrak{A}(t) = \begin{pmatrix} \alpha + \beta e^{at} + \gamma e^{2at} & \alpha - \gamma e^{2at} \\ \alpha - \gamma e^{2at} & \alpha - \beta e^{at} + \gamma e^{2at} \end{pmatrix}$$

dem System (15) nur für $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Dann ist aber $\det \mathfrak{A}(t) = 0$,
o daß nach Satz 1 für (44) keine Lagrange-Funktion existiert.

2b) Im vorangehenden Beispiel werde die Matrix $\mathfrak{N}$ abgeändert in
$\mathfrak{N} = b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, also $b_1 = b_2 = b \neq 0$ gesetzt, was sich durch spezielle Wahl
der Baugrößen des mechanischen Systems erreichen läßt, ohne daß der nicht-
konservative Charakter geändert wird. Es existiert dann eine Lagrange-
Funktion; wegen der zweimaligen stetigen Differentiierbarkeit von $\mathfrak{Q}$ ist
dieses System selbstadjungiert im weiteren Sinne. Mit der symmetrischen
Partikularlösung

$$(46) \quad \mathfrak{A}(t) = \begin{pmatrix} 1 + e^{2at} & 1 - e^{2at} \\ 1 - e^{2at} & 1 + e^{2at} \end{pmatrix}$$

[10]) E. HAHNKAMM, Erzwungene Schwingungen reibungsgekoppelter Schwin-
ungssysteme. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. **13** (1933), S. 183–202, insbes.
S. 198.

aus (14) werden nämlich $\det \mathfrak{A} = 4 \cdot e^{2at} \neq 0$ und (15) identisch erfüllt. In Satz 3 kann $\mathfrak{T} \equiv \mathfrak{A}$ gewählt werden. Um ein L zu berechnen, geben wir $\mathfrak{C} = -\mathfrak{A}\mathfrak{R} = \mathfrak{C}'$ vor und können nach (16) bis (18) die Matrix $\mathfrak{B}(t) = (0)$ wählen. Mit $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}\mathfrak{P}$ wird (13) für $\mathfrak{D}(t) \equiv (0)$ erfüllt. Schließlich folgt aus (6) mit $G(\mathfrak{q}, t) \equiv 0$

$$(47) \quad L \equiv \tfrac{1}{2}\left[e^{2at}\left\{(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 - b\,(q_1 - q_2)^2 + 2\,(c_1 - c_2)\,(q_1 - q_2)\right\} + \right.$$
$$\left. + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 - b\,(q_1 + q_2)^2 + 2\,(c_1 + c_2)\,(q_1 + q_2)\right].$$

Nach Einführung des Impulsvektors

$$(48) \qquad \mathfrak{p} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

kann der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathfrak{q}}$ eliminiert werden; wir erhalten in bekannter Weise aus

$$(49) \qquad \mathfrak{p}'\,\dot{\mathfrak{q}} - L = H(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, t)$$

für L aus (43) eine von der Variablen t freie und für L aus (47) eine t explizit enthaltende Hamilton-Funktion H, mit deren Hilfe sich die Bewegungsgleichungen (1) durch ein äquivalentes kanonisches Gleichungssystem erster Ordnung ersetzen lassen. In Beispiel 1 ist das Energieintegral $H = \text{const}$ ein erstes Integral der Bewegungsgleichungen, die Zeitvariable t ist eine Art zyklischer Koordinate; das Variationsprinzip (3) für die Raumzeitlinien der Bewegung läßt sich nach Elimination von t durch das Jacobische Prinzip der kleinsten Aktion für die Bahnkurven ersetzen, während in Beispiel 2b) nur die Raumzeitlinien und nicht die Bahnkurven Extremale eines Variationsproblems sind.

(Eingegangen am 11. Mai 1943.)

Reelle Eigenwerte verallgemeinerter Hillscher Eigenwertaufgaben 2. Ordnung.

Von

M. J. O. Strutt in Eindhoven (Holland).

Einleitung und Zusammenfassung.

Die Hillsche Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 w}{d z^2} + w(z) \cdot \{\lambda + \gamma \Phi(z)\} = 0,$$

o λ und γ reelle Parameter und $\Phi(z)$ eine reellwertige periodische Funktion it der reellen Periode ζ darstellen, hat bereits zu vielen Arbeiten Anlaß gegeben. s Ausgangspunkt wird meistens der Satz von Floquet benutzt, demzufolge ige Gleichung Lösungen mit der Eigenschaft: $w(z+\zeta) = \sigma w(z)$ aufweist. ier ist σ der charakteristische Faktor, der entweder reell, oder komplex mit m Modul 1 wird. In den genannten Arbeiten wird auf verschiedenen Wegen rsucht, den charakteristischen Faktor, der nicht von z, sondern nur von γ, ζ und Φ abhängt, zu bestimmen, ohne daß hierbei bisher ein voller Erfolg verzeichnen wäre.

Wir haben die obige Fragestellung umgedreht und betrachten ζ, σ und Φ s gegeben, die jeweils zusammengehörigen Parameterwerte λ und γ dagegen s gesucht[1]). Es entsteht eine homogene lineare Randwertaufgabe 2. Ordnung, elche allerdings, wie leicht einzusehen, nicht selbstadjungiert ist (die Differntialgleichung wohl, aber die Randbedingungen nicht). Die Eigenwerte r $|\sigma| = 1$ dieser Aufgabe können durch Extremumseigenschaften bestimmt id dementsprechend berechnet werden[1]). Auch Eigenwertschranken lassen ch auf dieser Grundlage in verschiedener Weise angeben. Die Parameter λ id γ können als rechtwinklige Koordinaten in einer Ebene betrachtet werden, der die Eigenwerte auf analytischen Kurven liegen. Eine Reihe von Eigenhaften dieser Kurven läßt sich in allgemeiner Weise ableiten und bestimmt n Kurvenverlauf im großen.

Nach Erledigung dieser Hillschen Aufgabe im engeren Sinne kann die age aufgeworfen werden, in welcher Weise sie zu verallgemeinern wäre.

[1]) M. J. O. Strutt, Verslagen Nederl. Akademie van Wetenschappen, Amsterdam (1943), S. 83—90, 97—104.

Eine Möglichkeit besteht darin, daß wir die Zahl der Parameter bei einer Differentialgleichung 2. Ordnung erweitern und auf eine Gleichung der Form

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \lambda w + w\gamma_1 \Phi_1(z) + w\gamma_2 \Phi_2(z) = 0$$

übergehen, in der Φ_1 und Φ_2 reellwertige periodische Funktionen mit der gleichen Grundperiode ζ und λ, γ_1, γ_2 reelle Parameter darstellen. Diese Gleichungsform tritt, wie wir an Beispielen zeigen (§ 6) in Fragestellungen der mathematischen Physik auf. Bei den gleichen Randbedingungen wie oben können für die zusammengehörigen Eigenwerte λ, γ_1 und γ_2 wieder untere Schranken mit Hilfe einer geeigneten Greenschen Funktion angegeben werden (§ 2). Weiter gelten für diese Eigenwerte, analog wie im Fall zweier Parameter, Maximum-Minimum-Eigenschaften (§ 3). Auf Grund dieser Extremumseigenschaften ergeben sich neue Schranken für die Eigenwerte (§ 4). Wenn wir λ, γ_1 und γ_2 als rechtwinklige Raumkoordinaten betrachten, liegen die Eigenwerte auf analytischen Flächen. Es gibt zu jedem reellen σ, oder komplexen σ mit dem Modul 1 eine abzählbar unendliche Zahl getrennter Flächen. Nur Flächen, welche zu $\sigma = +1$ oder zu $\sigma = -1$ gehören, können einander treffen und keine einzige Fläche kann sich selber von endlicher Ordnung berühren oder schneiden (§ 5). Als Beispiel zu den vorangehenden Ausführungen bringen wir zwei Gleichungen der mathematischen Physik: die erweiterte Mathieusche Gleichung und die Lamésche Potentialgleichung. In diesen beiden Fällen wird graphisch gezeigt, wie bekannte Eigenwerte in bezug auf einige der oben berechneten unteren Schranken liegen (§ 6). Zum näheren Studium der Eigenwertflächen werden $\partial\lambda/\partial\gamma_1$ und $\partial\lambda/\partial\gamma_2$ auf einer solchen Fläche berechnet (§ 7) und aus dem Ergebnis wird geschlossen (§ 8), daß λ für jene Flächen, welche zu $|\sigma| = 1$ gehören (σ reell oder komplex) eine ganze transzendente Funktion von γ_1 und γ_2 ist. Weiter berechnen wir auch die zweiten Ableitungen von λ nach γ_1 und γ_2, welche die Krümmung der Eigenwertflächen bestimmen (§ 9). Die Lagenordnung der Eigenwertflächen ergibt sich (§ 10) durch eine kleine Erweiterung von Berechnungen, welche H. A. Kramers veröffentlicht hat, und zwar zeigt sich, daß sie entlang Geraden im λ-, γ_1-, γ_2-Raum, welche bestimmte Bedingungen erfüllen, mit der von H. A. Kramers und O. Haupt in einfacheren Fällen angegebenen übereinstimmt. Beispiele lassen schließen, daß die angegebenen hinreichenden Bedingungen für diese Lagenordnung auch notwendig sind. In der Umgebung der λ-Achse weisen die Eigenwertflächen einfache Eigenschaften auf (§ 11). Aus den Extremumseigenschaften der Eigenwerte wird auf den Verlauf von Eigenwertflächen im großen geschlossen (§ 12) Hierauf wenden wir uns dem asymptotischen Verlauf der Eigenwertflächen für $|\lambda| + |\gamma_1| + |\gamma_2| \gg \zeta^{-}$

u. Zunächst werden die asymptotischen Lösungen der Hillschen Differentialleichung nach R. E. Langer im Falle zweier Nullstellen der Funktion $+ \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2$ im Bereich einer Grundperiode der unabhängigen Veränderchen z angegeben. Hieraus werden die Eigenwertgleichungen abgeleitet § 14). Bevor aus ihnen der asymptotische Verlauf der Eigenwertflächen efolgert wird, stellen wir einige Hilfsbetrachtungen in § 15 zusammen. Das ichtigste Ergebnis in bezug auf die asymptotische Lage der Eigenwertächen in § 16 besteht darin, daß je zwei benachbarte ungleichnamig (halb- zw. ganz-) periodische Eigenwertflächen asymptotisch nahe zusammenliegen. as gleiche gilt für alle zu komplexen σ-Werten gehörenden Eigenwertflächen, elche zwischen zwei benachbarten ungleichnamigen periodischen Eigenwertächen liegen. Weiter wird in § 16 angegeben, daß entlang Geraden, für elche die Lagenordnung der Eigenwertflächen nach O. Haupt und H. A. Kramers gilt, zu jedem komplexen σ und zu $\sigma = \pm 1$ abzählbar unendlich iele Eigenwerte liegen. Entlang anderen Geraden liegen zu jedem reellen der komplexen σ-Wert abzählbar unendlich viele positive sowie negative igenwerte. Die Lage dieser Eigenwerte wird asymptotisch berechnet. In 17 wird abgeleitet, daß asymptotisch für alle Eigenwertflächen zu $|\sigma| \approx 1$ ilt: $\gamma_1 \cdot \partial\lambda/\partial\gamma_1 + \gamma_2 \cdot \partial\lambda/\partial\gamma_2 < 0$ sowie $\partial^2\lambda/\partial\gamma^2 < 0$, wo $\gamma_1 = \mu_1 \gamma$ und $_2 = \mu_2\gamma$. Für $\lambda \to -\infty$ ist $|\partial^2\lambda/\partial\gamma^2| \to 0$. Die genannten Ergebnisse önnen fast alle unter bestimmten Voraussetzungen auf den Fall ausgedehnt erden, daß die Funktion $\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2$ im Grundperiodenbereich von z isgesamt $2n$ Nullstellen aufweist (§ 18 und 19).

Als weitere Verallgemeinerung der Hillschen Gleichung betrachten ir m Parameter $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_m$, sowie m Funktionen $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m$ n Stelle der obigen Parameter γ_1 und γ_2 und zwei Funktionen Φ_1 und Φ_2 Abschnitt IV). Auch in diesem Fall lassen sich mit Hilfe der Greenschen unktion sowie der Maximum-Minimum-Eigenschaften Eigenwertschranken ngeben. Diese Schranken werden auf den interessanten Sonderfall abzählbar nendlich vieler Parameter γ_k sowie ebensovieler Funktionen Φ_k angewandt, er bei $\Phi_1 = \cos(2\pi z/\zeta)$, $\Phi_2 = \cos(4\pi z/\zeta)$, $\ldots \Phi_m = \cos(2m\pi/\zeta)$ zur illschen Gleichung im engeren Sinne mit *gerader* Funktion Φ gehört. Die arameter γ_k stellen dann die Fourier-Koeffizienten dieser Funktion Φ dar, nd falls Φ z. B. der Dirichletschen Bedingung genügt, können für diese oeffizienten leicht untere Schranken angegeben werden (§ 20). Die Eigenerte liegen jetzt auf Hyperflächen, deren wichtigste allgemeinen Eigenhaften in Analogie zum obigen Fall zweier Parameter γ_k abgeleitet werden 21). Auch Lage und Verlauf dieser Hyperflächen entsprechen denjenigen r Eigenwertflächen im obigen dreidimensionalen Parameterraum (§ 22). achdem auch die asymptotischen Eigenschaften der Eigenwerthyperflächen sammengestellt worden sind (§ 23), wird schließlich eine Anwendung auf

die Lamésche Wellengleichung gegeben, bei der vier Parameter $\lambda, \gamma_1, \gamma_2$ und γ_3 auftreten (§ 24).

Wir überblicken hier die *Eigenwerte* einer Klasse von Randwertaufgaben 2. Ordnung mit periodischen Koeffizienten. Die *Eigenfunktionen* solcher Aufgaben sind dabei nur gestreift worden und sollen in einer späteren Arbeit eingehend behandelt werden. Auch weitere Verallgemeinerungen der Hillschen Aufgabe, so z. B. auf Gleichungen n-ter Ordnung, sollen in einer späteren Arbeit zur Behandlung kommen.

I. Allgemeine Eigenschaften der Eigenwerte.

§ 1.

Aufgabenstellung.

Wir betrachten die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 w(z)}{dz^2} + \{\lambda + \gamma_1 \Phi_1(z) + \gamma_2 \Phi_2(z)\} w(z) = 0, \tag{1}$$

wo λ, γ_1 und γ_2 reelle Parameter und Φ_1 sowie Φ_2 reellwertige Funktionen darstellen, welche periodisch sind mit der Grundperiode ζ. Wenn die Periode von Φ_2 ein ganzes Vielfaches jener von Φ_1 oder umgekehrt ist, so wird ζ gleich der *größten* der beiden Perioden. Die Funktionen sollen stückweise stetig und in konvergente Fourier-Reihen entwickelbar sein. Bekanntlich kann *jede* Differentialgleichung 2. Ordnung mit entsprechenden periodischen Koeffizienten durch eine Transformation der abhängigen Veränderlichen in die Form (1) gebracht werden. Die Lösungen w der Gleichung (1) sollen den Randbedingungen:

$$\begin{cases} w(z_0 + \zeta) = \sigma\, w(z_0); \\ w'(z_0 + \zeta) = \sigma\, w'(z_0) \end{cases} \tag{2}$$

genügen, wo Akzente Differentiation nach z bedeuten und z_0 einen beliebig gewählten Wert der abhängigen Veränderlichen darstellt. Die Größe σ soll reell, oder aber komplex mit dem Modul 1 sein. Wir suchen bei gegebenen Werten von zwei der drei Parameter λ, γ_1 und γ_2 den dritten zu bestimmen und nennen dies eine verallgemeinerte Hillsche Eigenwertaufgabe. Für die obengenannten Werte von σ gibt es, wie wir in dieser Arbeit zeigen werden, sicherlich reelle Werte des gesuchten Parameters, welche die Eigenwertaufgabe erfüllen. Allerdings sind nicht *alle* Eigenwerte, welche zu diesen σ-Werten gehören, reell.

§ 2.

Untere Schranken für die γ-Eigenwerte mit den kleinsten Beträgen.

Mit Hilfe einer geeignet gewählten Greenschen Funktion $G(z, \mathfrak{z})$ kann die obige Hillsche Eigenwertaufgabe als lineare homogene Integralgleichung geschrieben werden ($z_1 = z_0 + \zeta$):

$$w(z) = \delta \int_{z_0}^{z_1} \{\gamma_1 \Phi_1(\mathfrak{z}) + \gamma_2 \Phi_2(\mathfrak{z})\} \cdot G(z, \mathfrak{z}) \cdot w(\mathfrak{z})\, d\mathfrak{z}. \tag{3}$$

Den hier eingeführten Parameter δ können wir nachträglich gleich 1 setzen. Die Greensche Funktion $G(z, \mathfrak{z})$ lautet im vorliegenden Fall[1]):

$$\begin{cases} G(z,\mathfrak{z}) = \dfrac{-\frac{\sigma}{\sqrt{\lambda}} \sin\{\sqrt{\lambda}\,(z-\mathfrak{z}+\zeta)\} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin\{\sqrt{\lambda}\,(z-\mathfrak{z})\}}{\sigma^2 - 2\sigma\cos\zeta\sqrt{\lambda} + 1} & \text{für } z \leqq \mathfrak{z}; \\ G(z,\mathfrak{z}) = \dfrac{\frac{\sigma}{\sqrt{\lambda}} \sin\{\sqrt{\lambda}\,(z-\mathfrak{z}-\zeta)\} - \frac{\sigma^2}{\sqrt{\lambda}} \sin\{\sqrt{\lambda}\,(z-\mathfrak{z})\}}{\sigma^2 - 2\sigma\cos\zeta\sqrt{\lambda} + 1} & \text{für } z \geqq \mathfrak{z}. \end{cases} \tag{4}$$

Wenn der Nenner des Ausdrucks (4) verschwindet, muß eine verallgemeinerte Greensche Funktion G_a eingeführt werden, die für $\sigma = \exp(i\,\zeta\sqrt{\lambda})$, $\zeta\sqrt{\lambda} = n\pi$, $n = \pm 1, \pm 2$, usw. wird[1]):

$$\begin{cases} G_{a_1}(z,\mathfrak{z}) = \frac{1}{\zeta\sqrt{\lambda}}(z-z_0)\sin\{\sqrt{\lambda}\,(z-\mathfrak{z})\} + \frac{1}{\zeta\lambda}\sin\{\sqrt{\lambda}\,(\mathfrak{z}-z_0)\} \cdot \\ \qquad\qquad \cdot \sin\{\sqrt{\lambda}\,(z-z_0)\} \quad \text{für } z \leqq \mathfrak{z}; \\ G_{a_1}(z,\mathfrak{z}) = \frac{1}{\zeta\sqrt{\lambda}}(z-z_0)\sin\{\sqrt{\lambda}\,(z-\mathfrak{z})\} + \frac{1}{\zeta\lambda}\sin\{\sqrt{\lambda}\,(\mathfrak{z}-z_0)\} \cdot \\ \qquad\qquad \cdot \sin\{\sqrt{\lambda}\,(z-z_0)\} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\{\sqrt{\lambda}\,(z-\mathfrak{z})\} \quad \text{für } z \geqq \mathfrak{z} \end{cases} \tag{4a}$$

und für $\lambda = 0$[2]) sowie $\sigma = +1$:

$$G_{a\,2}(z,\mathfrak{z}) = \frac{1}{2\zeta}(z-\mathfrak{z})^2 - \tfrac{1}{2}|z-\mathfrak{z}| + C \quad \text{für } z \gtrless \mathfrak{z}, \tag{4b}$$

wo C eine willkürliche Konstante darstellt.

Aus dem Konvergenzradius der Neumannschen Reihe der Gleichung (3) ergibt sich sofort eine Schranke für δ:

$$\delta^{-2} \leqq \int_{z_0}^{z_1}\int_{z_0}^{z_1} \{\gamma_1\Phi_1(\mathfrak{z}) + \gamma_2\Phi_2(\mathfrak{z})\}^2 \cdot |G(z,\mathfrak{z})|^2\, dz\, d\mathfrak{z},$$

oder, mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung:

$$\delta^{-2} \leqq \int_{z_0}^{z_1}\int_{z_0}^{z_1} (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)\,(\Phi_1^2 + \Phi_2^2) \cdot |G(z,\mathfrak{z})|^2\, dz\, d\mathfrak{z}.$$

[2]) R. Courant u. D. Hilbert, Methoden der math. Physik, Bd. 1, 1. Aufl., S. 294. Berlin, Springer, 1924.

Hieraus erhält man für $\delta = 1$ unmittelbar die gewünschten Schranken für die Eigenwertparameter γ_1 und γ_2:

$$(5) \qquad (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^{-1} \leqq \int_{z_0}^{z_1} \int_{z_0}^{z_1} (\Phi_1^2 + \Phi_2^2) \cdot |G(z, \zeta)|^2 \, dz \, d\zeta.$$

Durch nochmalige Anwendung der Schwarzschen Ungleichung kann (5) noch etwas umgeformt werden:

$$(5a) \qquad (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^{-2} \leqq \int_{z_0}^{z_1} \int_{z_0}^{z_1} (\Phi_1^2 + \Phi_2^2)^2 dz \, d\zeta \cdot \int_{z_0}^{z_1} \int_{z_0}^{z_1} |G(z, \zeta)|^4 \, dz \, d\zeta.$$

Wenn ψ^2 die obere Grenze von $\Phi_1^2 + \Phi_2^2$ im Bereich $z_0 \leqq z, \zeta \leqq z_1$ darstellt, können wir auch schreiben:

$$(5b) \qquad (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^{-1} \leqq \psi^2 \int_{z_0}^{z_1} \int_{z_0}^{z_1} |G(z, \zeta)|^2 dz \, d\zeta.$$

Die obigen Gleichungen (5), (5a) und (5b) gelten, falls links der zum Eigenwert mit dem *kleinsten* absoluten Betrag gehörige Wert $\gamma_1^2 + \gamma_2^2$ eingesetzt wird. Falls zwei *gleiche* Eigenwerte mit dem kleinsten absoluten Betrag vorhanden sind, kann links $2\,(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^{-1}$ geschrieben werden, bei drei gleichen solchen Eigenwerten $3\,(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^{-1}$, usw.

Wir können die drei Parameter λ, γ_1 und γ_2 als rechtwinklige Koordinaten auffassen und erhalten dann aus den Gleichungen (5), (5a) und (5b) *Rotationsflächen um die λ-Achse als Schranken für γ_1 und γ_2*. In den früher berechneten Sonderfällen[1]) entstehen diese Rotationsflächen nach Gleichung (5b) unmittelbar durch Rotation der gezeichneten Kurven von Fig. 1(a—d) um die λ-Achse.

§ 3.

Maximum-Minimum-Eigenschaften der Eigenwerte für $|\sigma| = 1$.

Wir setzen voraus, daß die untengenannten Eigenwerte existieren. Nach früheren Ausführungen[1]) ist bei gegebenen Werten γ_1 und γ_2 jeder Eigenwert λ durch eine Maximum-Minimum-Eigenschaft gekennzeichnet. Wir betrachten den Ausdruck:

$$(6) \qquad M = -\int_{z_0}^{z_1} w^* \frac{d^2 w}{dz^2} \, dz - \gamma_1 \int_{z_0}^{z_1} \Phi_1(z) w^* w \, dz - \gamma_2 \int_{z_0}^{z_1} \Phi_2(z) \, w^* w \, dz,$$

in dem w eine den Randbedingungen (2) genügende, zweimal stetig differenzierbare Funktion darstellt. Die Funktion w^* ist zu w adjungiert[1]).

Es sei an dieser Stelle hervorgehoben[1]), daß die allgemeine Hillsche Eigenwertaufgabe, wie sie hier betrachtet wird, *nicht* selbstadjungiert ist,

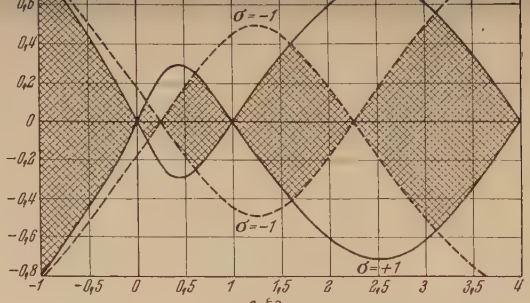


Fig. 1 a.

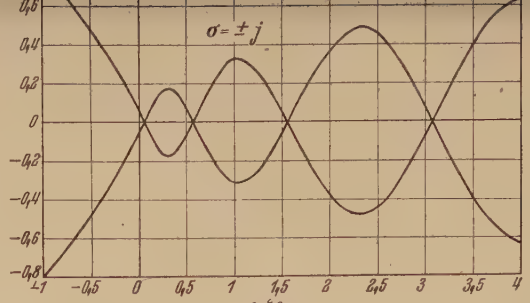


Fig. 1 b.

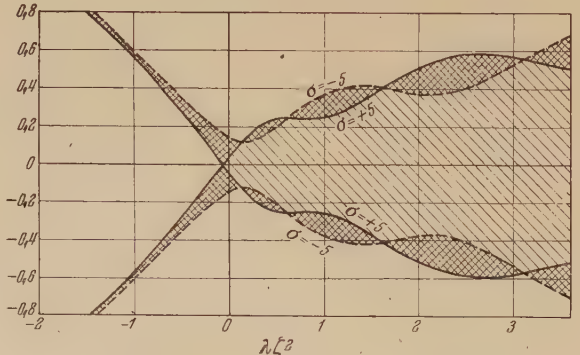


Fig. 1 c.

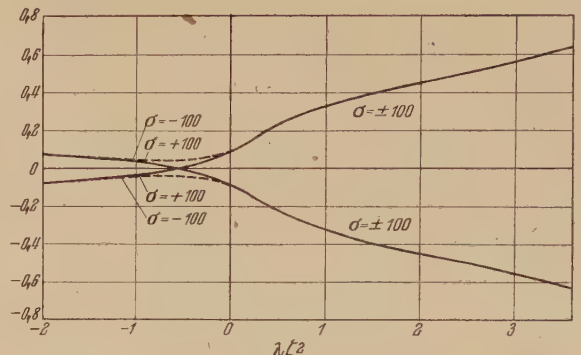


Fig. 1 d.

*63 Fig. 1 (a—d). Ordinate: $\zeta^2 4\pi^2 \sqrt{I}$, wo $I = \int_{z_0}^{z_1} \int_{z_0}^{z_1} |G(z,\zeta)|^2 \, dz \, d\zeta$ und G gegeben durch Gleichung (4). Abszisse: $\lambda \zeta^2/4\pi^2$. Fig. 1 a: $\sigma = \pm 1$, Fig. 1 b: $\sigma = \pm i$, Fig. 1 c: $\sigma = \pm 5$, Fig. 1 d: $\sigma = \pm 100$. In den schraffierten Bereichen der Fig. 1 a für pos. λ gibt es keine Eigenwerte für reelle σ-Werte und für neg. λ keine Eigenwerte für komplexe σ-Werte. Diese Kurven sollen alle um die λ-Achse rotieren. Die entstandenen Flächen bilden untere Eigenwertschranken im γ_1-, γ_2-, λ-Raum.

aber für $\sigma = \pm 1$ in eine selbstadjungierte Aufgabe übergeht. In diesen Fällen gehen die unten angeführten Maximum-Minimum-Eigenschaften in die für polare selbstadjungierte Aufgaben bekannten über.

Wenn w quellenmäßig mit Hilfe einer der GREENschen Funktionen (4), (4a) oder (4b) dargestellt wird:

$$w(z) = \int_{z_0}^{z_1} G(z, \mathfrak{z}) \cdot f(\mathfrak{z})\, d\mathfrak{z}, \tag{6a}$$

wo f eine stetige integrierbare Funktion ist, so erhält man für w^* die Darstellung:

$$w^*(z) = \int_{z_0}^{z_1} G^*(z, \mathfrak{z}) \cdot f^*(\mathfrak{z})\, d\mathfrak{z} = \int_{z_0}^{z_1} G(\mathfrak{z}, z)\, f^*(\mathfrak{z})\, d\mathfrak{z}, \tag{6b}$$

wo G^* die zu G adjungierte GREENsche Funktion ist, welche aus G durch Verwechslung von z und $\mathfrak{z}$ hervorgeht, während f^* zu f konjugiert komplex ist, ebenso wie w^* zu w. Die Funktion w^* genügt den zu (2) adjungierten Randbedingungen, welche aus (2) entstehen, indem σ durch $1/\sigma$ ersetzt wird. Die Funktionen w und w^* sollen den Bedingungen:

$$\int_{z_0}^{z_1} w(z)\, w^*(z)\, dz = 1 \tag{7}$$

und:

$$\int_{z_0}^{z_1} w(z)\, F_k(z)\, dz = 0, \quad k = 1, 2, 3 \ldots n-1, \tag{8}$$

genügen, wo $F_k(z)$ einem Satz stetiger integrierbarer Funktionen angehört. *Der kleinste Eigenwert λ ist das Minimum von M unter der Nebenbedingung* (7), *wenn w und w^* variiert werden.* Dieser kleinste Eigenwert hat, wie aus den in Fig. 1 angegebenen Schranken zu schließen ist, einen endlichen Betrag, falls $|\gamma_1|$ und $|\gamma_2|$ endlich sind. Die weiteren Eigenwerte λ numerieren wir ihrer Größe nach, von diesem kleinsten Eigenwert ausgehend. *Der n-te Eigenwert λ wird erhalten, indem man das Minimum von M bei Variation von w und w^* unter den Nebenbedingungen* (7) *und* (8) *für bestimmte Funktionen F_k berechnet und dann dieses Verfahren für andere Funktionen F_k wiederholt, bis das Minimum möglichst groß wird.*

In analoger Weise sind auch die Eigenwerte γ_1 (bzw. γ_2) bei gegebenen Werten der Parameter λ und γ_2 (bzw. γ_1) durch Maximum-Minimum-Eigenschaften bestimmt[1]). Wir werden dies kurz für die Eigenwerte $\gamma_1 = \gamma_2/\mu_2$ ausführen und betrachten den Ausdruck:

$$M = -\int_{z_0}^{z_1} w^* \left(\frac{d^2 w}{d z^2} + \lambda w\right) dz = -\int_{z_0}^{z_1} w \left(\frac{d^2 w^*}{d z^2} + \lambda w^*\right) dz \tag{9}$$

nd die Bedingungsgleichungen:

$$\int_{z_0}^{z_1} \{\Phi_1(z) + \mu_2 \Phi_2(z)\} \cdot w(z) \cdot w^*(z) \cdot dz = N_2; \tag{10}$$

$$\int_{z_0}^{z_1} \{\Phi_1(z) + \mu_2 \Phi_2(z)\} \cdot w(z) \cdot F_k(z) \cdot dz = 0; \quad k = 1, 2, \ldots n-1. \tag{11}$$

Wir setzen zunächst voraus, M sei für alle in Betracht kommenden Funktionen w und w^* positiv definit und $\Phi_1 + \mu_2 \Phi_2 = g$ wechsele im Bereich $z_0 \leqq z \leqq z_1$ das Vorzeichen. Dann ist der n-te positive Eigenwert γ_1 nach der Größe geordnet gleich dem Maximum-Minimum von M, wenn wir für einen bestimmten Satz der Funktionen F_k die Funktionen w und w^* bei $N_2 = +1$ variieren, bis M ein Minimum erreicht und dieses Verfahren für andere Sätze von Funktionen F_k wiederholen, bis das Minimum möglichst hoch wird. Der Betrag des n-ten negativen Eigenwertes γ_1 (nach der Größe der Beträge geordnet) ist das Maximum-Minimum von M für Funktionen w und w^*, für welche $N_2 = -1$ ist. Falls M negativ definit ist and g das Vorzeichen im Bereich $z_0 \leqq z \leqq z_1$ wechselt, wird der n-te positive Eigenwert gleich dem Maximum-Minimum von $-M$ für Funktionen w und w^*, für welche $N_2 = -1$ ist. Der Betrag des n-ten negativen Eigenwertes γ_1 wird gleich dem Maximum-Minimum von $-M$ für Funktionen w und w^*, für welche $N_2 = +1$ ist. Falls M verschiedene Vorzeichen haben kann und g im Bereich $z_0 \leqq z \leqq z_1$ positiv ist, wird der n-te positive Eigenwert γ_1 gleich dem Maximum-Minimum von M für Funktionen w und w^*, für welche M positiv und $N_2 = +1$ ist. Der Betrag des n-ten negativen Eigenwertes γ_1 wird das Maximum-Minimum von $-M$ für Funktionen w und w^*, für welche M negativ und $N_2 = +1$ ist. Falls M verschiedene Vorzeichen haben kann und g im Bereich $z_0 \leqq z \leqq z_1$ negativ ist, wird der n-te positive Eigenwert das Maximum-Minimum von $-M$ für alle w und w^*, für welche M negativ und $N_2 = -1$ ist. Der Betrag des n-ten negativen Eigenwertes ist das Maximum-Minimum von M für Funktionen w und w^*, für welche M positiv und $N_2 = -1$ ist.

Bei der Durchführung der Maximum-Minimum-Verfahren nähern sich bei geeigneten Stetigkeitsvoraussetzungen die Funktionen F_k der Gleichungen (8) und (11) den Eigenfunktionen w_1^*, w_2^*, ... w_{n-1}^*, welche zu den jeweils $n-1$ Eigenwerten niedrigerer Ordnung gehören, während w und w^* sich der Eigenfunktion bzw. adjungierten Eigenfunktion zum n-ten Eigenwert nähern.

Wir können offenbar auch $\gamma_1 = \mu_1 \gamma_2$ setzen und dann an Stelle der Gleichungen (10) und (11) die Ausdrücke:

$$\int_{z_0}^{z_1} \{\mu_1 \Phi_1(z) + \Phi_2(z)\} \cdot w(z) \cdot w^*(z) \cdot dz = N_1 \tag{10 a}$$

und

$$\int_{z_0}^{z_1} \{\mu_1 \Phi_1(z) + \Phi_2(z)\} \cdot w(z) \cdot F_k(z) \cdot dz = 0; \quad k = 1, 2, \ldots n-1 \tag{11a}$$

betrachten. An Stelle des Eigenwertes γ_1 erhalten wir dann nach den obigen Maximum-Minimum-Verfahren den Eigenwert γ_2. Offenbar kommen die beiden angeführten Möglichkeiten darauf hinaus, daß wir in einer Ebene $\lambda = \text{konst.}$ entlang einem bestimmten Radius von der λ-Achse aus fortschreiten und auf diesem Radius den n-ten Eigenwert aufsuchen. Der entsprechende Radius berechnet sich aus γ_1 bzw. γ_2 nach $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = \gamma_1^2 (1 + \mu_2^2)$ bzw. $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = \gamma_2^2 (1 + \mu_1^2)$.

§ 4.

Eigenwertschranken auf Grund der Extremumseigenschaften.

Zur Anwendung der obengenannten Extremumseigenschaften bestimmen wir zunächst das Vorzeichen des Ausdrucks M nach Gleichung (9). Mit Hilfe der Greenschen Funktionen nach Gleichungen (4), (4a) und (4b) formen wir diesen Ausdruck etwas um und benutzen hierbei die Gleichung:

$$\frac{d^2 G}{d z^2} + \lambda G = 0,$$

welche für alle z im Bereich $z_0 \leqq z \leqq z_1$, außer für $z = \mathfrak{z}$. gilt sowie die weitere Bedingung:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{\partial G}{\partial z}\right]_{z = \mathfrak{z} - \varepsilon}^{z = \mathfrak{z} + \varepsilon} = -1.$$

Beide Gleichungen gelten in derselben Form auch für $G^*(z, \mathfrak{z}) = G(\mathfrak{z}, z)$. Wir setzen die quellenmäßigen Darstellungen (6a) und (6b) für w und für w^* in Gleichung (9) ein und erhalten mit Hilfe obiger Bedingungsgleichungen für G und G^*:

$$M = \int_{z_0}^{z_1} \int_{z_0}^{z_1} G^*(z, \mathfrak{z}) \cdot f^*(\mathfrak{z}) \cdot f(z)\, dz\, d\mathfrak{z} = \int_{z_0}^{z_1} \int_{z_0}^{z_1} G(z, \mathfrak{z}) \cdot f(\mathfrak{z}) \cdot f^*(z) \cdot dz\, d\mathfrak{z}. \tag{9a}$$

Indem wir für f eine Funktion wählen, welche nach einem geeigneten Grenzübergang überall verschwindet, außer für $\mathfrak{z}_1$, wo sie jeden endlichen Wert überschreitet, so erkennen wir, daß in diesem Fall das Vorzeichen von M mit demjenigen von $G(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_1)$ zusammenfällt:

$$\text{Vorz.}(M) = \text{Vorz.}[G^*(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_1)] = \text{Vorz.}[G(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_1)]. \tag{9b}$$

Falls das Vorzeichen der Ausdrücke (9b) nicht von $\mathfrak{z}_1$ abhängt, ist auch das Vorzeichen von M für alle stetigen integrierbaren Funktionen f das gleiche, d. h. M positiv oder negativ definit. Aus den Gleichungen (4), (4a) und (4b) ist zu ersehen, daß dieser Fall hier vorliegt.

Die Extremumseigenschaften der Eigenwerte gestatten unmittelbar ihren Vergleich mit jenen einfacher Eigenwertaufgaben, deren Eigenwerte sich direkt angeben lassen. Für diesen Vergleich kann eine früher[1]) angegebene Eigenwertänderungstafel benutzt werden. Die Funktionen Φ_1 und Φ_2 der Gleichung (1) sollen im Bereich $z_0 \leqq z \leqq z_1$ beide das Vorzeichen wechseln. Es sei $\Phi_{\max}$ größer als der größte Wert von $|\Phi_1|$ und von $|\Phi_2|$, $\Phi_{\min} = -\Phi_{\max}$ kleiner als der kleinste Wert von Φ_1 und Φ_2. Wir setzen:

$$12) \qquad \begin{cases} g_{\max} = (1 + |\mu_2|)\,\Phi_{\max}; \\ g_{\min} = (1 + |\mu_2|)\,\Phi_{\min} \end{cases}$$

im Falle, daß γ_1 und:

$$12a) \qquad \begin{cases} g_{\max} = (|\mu_1| + 1)\,\Phi_{\max}; \\ g_{\min} = (|\mu_1| + 1)\,\Phi_{\min}, \end{cases}$$

falls γ_2 als Eigenwertparameter verwendet wird. Hier ist offenbar $g_{\max} >$ dem größten und $g_{\min} <$ dem kleinsten Wert von g. Die zu $g_{\max}$ an Stelle von $\Phi_1 + \mu_2\Phi_2$ bzw. $\mu_1\Phi_1 + \Phi_2$ in Gleichung (1) gehörigen Eigenwerte seien $\Gamma^{\max}$, die zu $g_{\min}$ gehörigen Eigenwerte $\Gamma^{\min}$. Wir wollen hier die Fälle $\sigma = \pm 1$ betrachten, bemerken aber, daß für komplexe σ-Werte auf gleichem Wege analoge Ergebnisse abgeleitet werden können. Es gilt:

$$13) \qquad \begin{cases} \left.\begin{matrix} \Gamma^{\max} \cdot g_{\max} \\ \Gamma^{\min} \cdot g_{\min} \end{matrix}\right\} = \left(\frac{2\pi m}{\zeta}\right)^2 - \lambda \quad \text{für} \quad \sigma = +1; \\ \left.\begin{matrix} \Gamma^{\max} \cdot g_{\max} \\ \Gamma^{\min} \cdot g_{\min} \end{matrix}\right\} = \frac{(2m+1)^2\pi^2}{\zeta^2} - \lambda \quad \text{für} \quad \sigma = -1; \end{cases}$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Für positiv definite Werte von M gibt es nur positive Werte $\Gamma^{\max}$ und nur negative Werte $\Gamma^{\min}$, für negativ definite Werte von M nur negative Werte $\Gamma^{\max}$ und nur positive Werte $\Gamma^{\min}$. In diesen Fällen ist:

für M positiv definit:

$$\gamma_{+n1} \text{ bzw. } \gamma_{+n2} \geqq \Gamma^{\max}_{+n};\ \gamma_{-n1} \text{ bzw. } \gamma_{-n2} \leqq \Gamma^{\min}_{-n};$$

für M negativ definit:

$$\gamma_{-n1} \text{ bzw. } \gamma_{-n2} \leqq \Gamma^{\max}_{-n};\ \gamma_{+n1} \text{ bzw. } \gamma_{+n2} \geqq \Gamma^{\min}_{+n},$$

wo $+n$ den n-ten positiven Eigenwert und $-n$ den n-ten negativen Eigenwert bezeichnet. Zur weiteren Vereinfachung sei $\Phi_{\max} = |\Phi_{\min}| = \Phi$, $|\mu_1| \leqq 1$, $|\mu_2| \leqq 1$. Wir können dann $g_{\max}$ durch 2Φ und $g_{\min}$ durch -2Φ ersetzen. Weiter wird: $\Gamma^{\max}_{+n} = |\Gamma^{\min}_{-n}| = \Gamma^{\min}_{+n} = |\Gamma^{\max}_{-n}| = \Gamma$ und folglich:

$$\gamma^2_{+n1} \text{ bzw. } \gamma^2_{+n2} \geqq \Gamma^2,$$

also:

$$14) \qquad \gamma^2_{+n1} + \gamma^2_{+n2} \geqq 2\,\Gamma^2.$$

Links steht in dieser Gleichung (14) das Quadrat des Radius von der λ-Achse aus in einer Ebene $\lambda = \text{konst.}$ bis zum n-ten Eigenwert in der betreffenden Richtung, während Γ den jeweils n-ten Eigenwert darstellt, der sich aus (13) ergibt, falls wir $g_{\max}$ durch 2Φ und $g_{\min}$ durch -2Φ ersetzen. Die Eigenwerte (13) sind in der Fig. 2 gezeichnet worden. Wenn wir dieses Bild um die λ-Achse rotieren lassen, können wir unmittelbar (14) anwenden.

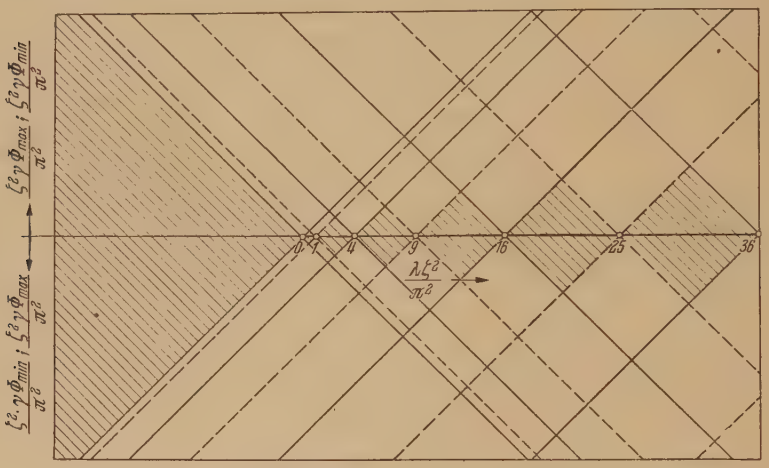


Fig. 2. Darstellung der Eigenwerte nach Gleichung (13) für $\sigma = +1$ (ausgezogen) und für $\sigma = -1$ (gestrichelt). Der Ordinatenmaßstab ist der gleiche wie der Abszissenmaßstab. An Stelle der Bezeichnungen $\Phi_{\max}$ bzw. $\Phi_{\min}$ im Bilde lese man $g_{\max}$ bzw. $g_{\min}$. Wenn die Figur um die λ-Achse rotiert, entstehen untere Schranken im γ_1-, γ_2-, λ-Raum nach Gleichung (14) für alle entsprechenden Eigenwerte.

Diese Schranken für den jeweils n-ten Eigenwert unserer Aufgabe bilden ein Beispiel für die Anwendung der angeführten Extremumseigenschaften der Eigenwerte.

Wir können aus diesen Eigenschaften auch *obere* Schranken für die Eigenwerte, z. B. mit den jeweils kleinsten Beträgen ableiten. Mit Hilfe des Ritzschen oder eines verwandten Verfahrens können sie weiterhin dazu verwendet werden, die Eigenwerte angenähert zu berechnen.

§ 5.

Die Eigenwerte liegen auf analytischen Flächen.

Wir wollen zunächst zeigen, *daß σ eine ganze transzendente Funktion der Parameter λ, γ_1 und γ_2 ist.* Hierzu gehen wir von zwei Lösungen w_{I} und w_{II} der Gleichung (1) aus, welche den Anfangsbedingungen: $w_{\mathrm{I}}(z_0) = 1$,

$'_{\mathrm{I}}(z_0) = 0, w_{\mathrm{II}}(z_0) = 0, w'_{\mathrm{II}}(z_0) = 1$ genügen (Akzente bedeuten Differentiation ach z). Für σ ergibt sich mit Hilfe dieser Lösungen die Gleichung[3]):

$$\sigma^2 - \sigma\{w_{\mathrm{I}}(z_1) + w'_{\mathrm{II}}(z_1)\} + 1 = 0. \tag{5}$$

ie Funktionen w_{I} und w_{II} sind analytische und ganze Funktionen der Para-eter λ, γ_1 und γ_2. Das gilt auch für jede Wurzel σ. Wenn wir σ einen festen ert erteilen, entsteht eine analytische Beziehung zwischen den Parametern, elche im λ-, γ_1-, γ_2-Raum durch *analytische Flächen* dargestellt wird. Einem estimmten σ-Wert entsprechen im allgemeinen *abzählbar unendlich viele trennte Flächen*, welche sich ins Unendliche erstrecken, wie aus asymptotischen ösungen der Gleichung (1) gefolgert werden kann[4]). Die einzelnen Eigen-ertflächen können im Endlichen nicht endigen und haben sich stetig ändernde bleitungen jeder Ordnung. Durch diese Eigenschaften sind in einem Punkte es $\lambda, \gamma_1, \gamma_2$-Raumes, durch den mehrere Flächen hindurchgehen, die einzelnen lächen voneinander zu unterscheiden. Da die Gleichung (15) höchstens vei zusammenfallende Wurzeln σ haben kann, können durch einen Raum-unkt höchstens zwei verschiedene Flächen hindurchgehen. Es erhebt sich ie Frage, ob eine Eigenwertfläche im obigen Sinne auch mit sich selber im ndlichen zusammentreffen kann. In diesem Fall könnte man von einem reffpunkt ausgehend entlang einer im Endlichen geschlossenen Raumkurve uf der Fläche wieder zum gleichen Treffpunkt zurückgelangen.

Wir können zeigen, daß nur für $\sigma = \pm 1$ zwei verschiedene Eigenwert-ächen durch einen Punkt gehen können. Weiter ergibt sich, daß *keine* Eigen-ertflächen (für keinen einzigen reellen oder komplexen σ-Wert, in letzterem all mit dem Betrag 1) sich selber treffen können.

Der Beweis des ersten Satzes geht von Gleichung (15) aus. Für jeden Vert von $\sigma \neq \pm 1$ gibt es für die gleichen Werte λ, γ_1 und γ_2 einen zweiten -Wert derart, daß das Produkt beider σ-Werte gleich $+1$ ist. Zu jedem ieser Werte gehört *eine* und nur eine Eigenfunktion. Auf jeder Eigenwert-äche, welche einem σ-Wert $\neq \pm 1$ entspricht, liegen demnach ausschließlich *nfache* Eigenwerte. Wenn nun durch einen Punkt des $\lambda, \gamma_1, \gamma_2$-Raumes zwei igenwertflächen hindurchgehen würden, wäre der betreffende Punkt ein veifacher Eigenwert. Dies geht z. B. aus der Tatsache hervor, daß die ersten nd (oder) die höheren Differentialquotienten von λ nach γ_1 und γ_2 ver-hieden sein müßten. Wenn im betreffenden Punkt nur eine einzige Eigen-unktion vorhanden wäre und demnach ein einfacher Eigenwert vorläge, wären iese Differentialquotienten (vgl. § 7) *eindeutig* bestimmt. Wenn aber ein

---

[3]) Z. B. M. J. O. Strutt, Ergebn. d. Math., Bd. 1, H. 3, S. 14. Berlin, Springer. 932.

[4]) M. J. O. Strutt, Verslagen Nederl. Akademie van Wetenschappen Amsterdam 2 (1943), Nr. 4 und 5, S. 153—162 und S. 212—222.

zweifacher Eigenwert vorläge, kämen wir mit dem obigen Schluß in Widerspruch, der besagt, daß jeder Punkt der Eigenwertfläche ein einfacher Eigenwert ist. Im Falle $\sigma = +1$ oder -1 können der Gleichung (15) zwei zusammenfallende σ-Werte genügen. Jedem σ-Wert entspricht wieder eine Eigenwertfläche mit nur einfachen Eigenwerten, den beiden zusammenfallenden σ-Werten kann somit ein Treffpunkt zweier Eigenwertflächen, also ein zweifacher Eigenwert entsprechen.

Der Beweis des zweiten Satzes ergibt sich daraus, daß für die Eigenwertflächen $\sigma = \pm 1$ der Parameter λ eine ganze transzendente Funktion von γ_1 und γ_2 ist, wie in § 8 gezeigt wird. Hierdurch können diese Eigenwertflächen *sich selber* nicht treffen.

Wenn zwei Flächen Schnittpunkte bilden, so liegen diese auf analytischen Raumkurven. Es können auch Eigenwertflächen auftreten, welche im Endlichen in sich geschlossen sind.

Durch die oben angegebenen Eigenwertschranken werden dem Verlauf der Eigenwertflächen ebenfalls Schranken auferlegt. So können z. B. in den schraffierten Bereichen der Fig. 1a, welche man als Rotationsgebiete um die λ-Achse auffassen soll, für positive λ-Werte keine Eigenwertflächen für reelle σ-Werte und für negative λ-Werte keine Eigenwertflächen für komplexe σ-Werte bei $|\sigma| = 1$ verlaufen.

§ 6.

Anwendungen auf Gleichungen der mathematischen Physik.

Hier sollen zwei Gleichungen der mathematischen Physik gestreift werden, welche als Sonderfälle der Gleichung (1) aufgefaßt werden können.

Bei der Transformation der partiellen Differentialgleichung:

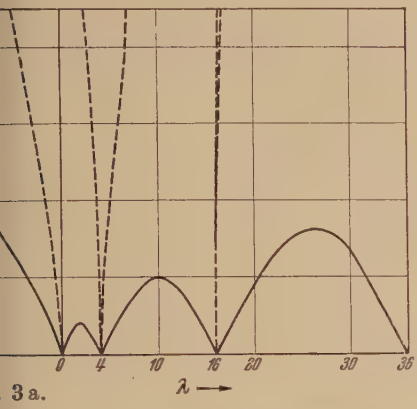
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_4^2} = 0$$

(der Wellengleichung in drei Dimensionen, oder Laplaceschen Potentialgleichung in vier Dimensionen entsprechend) auf ein System krummliniger Koordinaten, dem homofokale Paraboloide des Raumes x_1, x_2, x_3 zugrunde liegen, ergeben sich nach Trennung der abhängigen veränderlichen Differentialgleichungen der Form[5]):

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \left\{\eta - \frac{1}{8}\xi^2 - (p+1)\,\xi \cos 2z + \frac{\xi^2}{8}\cos 4z\right\} w = 0,$$

welche genau der Gleichung (1) entsprechen. Zwischen den vorliegenden Parametern η, ξ und p einerseits und den Parametern λ, γ_1 und γ_2 andererseits

estehen die Beziehungen: $\lambda = \eta - \xi^2/8$; $\gamma_1 = -(p+1)\,\xi$; $\gamma_2 = \xi^2/8$. iese Beziehungen erlauben sofort aus Fig. 1a untere Schranken für die eriodischen Eigenwerte in der λ-, γ_2-Ebene bei gegebenem p-Wert herzuiten. Diese sind in Fig. 3 dargestellt, während zugleich Eigenwertkurven ach E. L. Ince[5]) für $p = 4$ eingezeichnet worden sind.



3a.

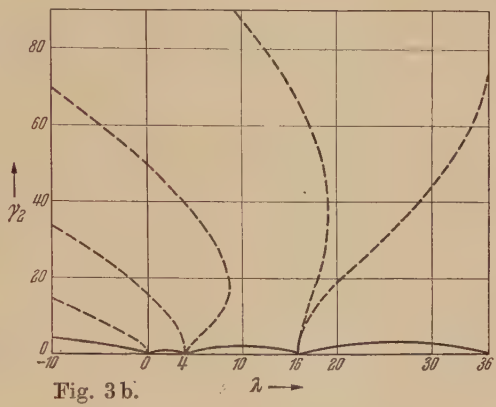


Fig. 3b.

ig. 3. Untere Eigenwertschranken für $\sigma = +1$ der verallgemeinerten Mathieuschen igenwertaufgabe. Senkrechte Projektion auf die λ-, γ_2-Ebene. Die ausgezogenen urven gehen aus der Fig. 1a hervor und stellen die unteren Eigenwertschranken dar. ie gestrichelten Eigenwertkurven gehen aus den von E. L. Ince berechneten Kurven ervor und liegen dementsprechend außerhalb der Schranken. Fig. a und b stellen die eichen Kurven in zwei Maßstäben für die Ordinaten dar. Fig. b zeigt den allgemeinen igenwertkurvenverlauf für größere γ_2-Werte, der den in Abschn. II und III angegebenen harakter aufweist. Entsprechend der Bemerkung im Anschluß an (5 b) können im orliegenden Fall die gezeichneten unteren Eigenwertschranken noch etwas erhöht werden.

Als zweiten Fall betrachten wir die Lamésche Differentialgleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y\{h - n(n+1)\,k^2\,sn^2\,x\} = 0,$$

elche durch die Umformung[6]):

$$z = a\,m(x,k); \quad \frac{dz}{dx} = (1 - k^2\sin^2 z)^{1/2}$$

e Gestalt:

$$(1 - k^2\sin^2 z)\frac{d^2y}{dz^2} - k^2\sin z\cos z\frac{dy}{dz} + \{h - n(n+1)\,k^2\sin^2 z\}\,y = 0$$

hält. Die weitere Umformung:

$$w = y\,e^{-\frac{1}{2}\int_{z_0}^{z}\frac{k^2\sin z\cos z}{1-k^2\sin^2 z}\,dz}$$

[5]) P. Humbert, Potentiels et prépotentiels, S. 31. Paris, Gauthiers-Villars, 1936; L. Ince, Proc. London Math. Soc. **23** (1923), S. 56—74.

[6]) E. L. Ince, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **60** (1940), S. 84.

führt zu:

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + w\Big[h + \frac{\{h - n(n+1)\}\, k^2 \sin^2 z}{1 - k^2 \sin^2 z} + \frac{\frac{k^2}{4}\cos 2z\,(1 - k^2 \sin^2 z) + \frac{3}{4} k^4 \sin^2 z \cos^2 z}{(1 - k^2 \sin^2 z)^2}\Big] = 0.$$

Da $k < 1$ ist, bleibt der Ausdruck in eckigen Klammern beschränkt und er entspricht dem Klammerausdruck in Gleichung (1), wenn wir setzen:

$$\lambda = h; \quad \gamma_1 = h - n(n+1); \quad \gamma_2 = 1; \quad \zeta = z;$$

$$\Phi_1 = \frac{k^2 \sin^2 z}{1 - k^2 \sin^2 z}; \quad \Phi_2 = \frac{\frac{k^2}{4}\cos 2z\,(1 - k^2 \sin^2 z) + \frac{3}{4} k^4 \sin^2 z \cos^2 z}{(1 - k^2 \sin^2 z)^2}$$

$$= \frac{\frac{k^2}{4}\cos^2 z\,(1 + k^2 \sin^2 z) + \frac{k^2}{4}\sin^2 z\,(k^2 - 1)}{(1 - k^2 \sin^2 z)^2}.$$

Wir müssen somit zunächst die Schnittkurven der Eigenwertflächen mit der Ebene $\gamma_2 = 1$ bilden und dann in dieser Ebene die Eigenwertkurven mit den Geraden $\gamma_1 + n(n+1) = \lambda$ zum Schnitt bringen. Die Schnittpunkte liefern für jeden Wert von n unmittelbar die Eigenwerte $\lambda = h$ der Lamé'schen Aufgabe. Wir haben die unteren Schranken der Fig. 1a auf diese Aufgabe angewandt und in der λ-, γ_1-Ebene die in Fig. 4 gezeichneten Eigen-

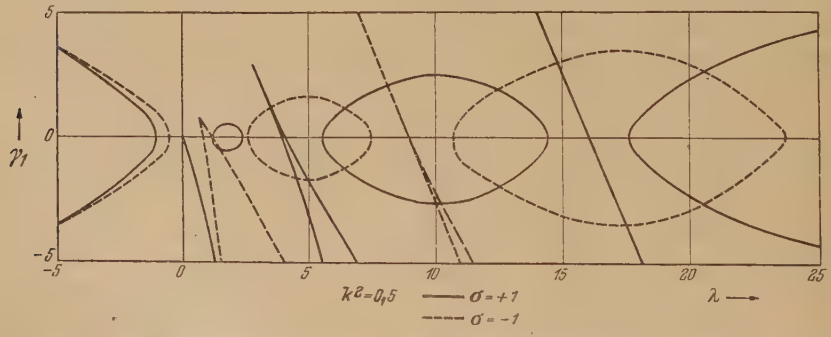


Fig. 4. Untere Eigenwertschranken der Lamé'schen Eigenwertaufgabe für $\sigma = +1$ (ausgezogene, in bezug auf die λ-Achse symmetrische Kurven) und für $\sigma = -1$ (gestrichelte, in bezug auf die λ-Achse symmetrische Kurven). Senkrechte Projektion auf die γ_1-, λ-Ebene. Die übrigen gestrichelten bzw. ausgezogenen Kurven gehen aus den von E. L. Ince berechneten Eigenwerten hervor. Alle Kurven gelten für $k^2 = 0{,}5$.

wertschranken erhalten, während zugleich einige von E. L. Ince[6]) für $k^2 = 0{,}5$ berechnete Eigenwertkurven eingezeichnet worden sind. Im vorliegenden Fall führt die Bemerkung im Anschluß an (5b) zu einer Erhöhung der gezeichneten unteren Eigenwertschranken.

II. Allgemeiner Verlauf der Eigenwertflächen.

§ 7.

Berechnung von $\partial\lambda/\partial\gamma_1$ und von $\partial\lambda/\partial\gamma_2$ auf einer Eigenwertfläche.

Bei dieser Berechnung nehmen wir zunächst an, der betrachtete Punkt n Parameterraum mit den rechtwinkligen Koordinaten λ, γ_1 und γ_2 sei ein *infacher* Eigenwert der Hillschen Aufgabe. Wir gehen von Gleichung (1) us und erteilen den Parametern λ, γ_1 und γ_2 je einen infinitesimalen Zu- achs $d\lambda, d\gamma_1$ und $d\gamma_2$. Zum ursprünglichen Eigenwert gehört die Eigen- unktion w und die Gleichung (1), zum geänderten Eigenwert die Eigen- unktion $\mathfrak{w} = w + \mathfrak{w}_1$ und die Gleichung:

$$\frac{d^2\mathfrak{w}}{dz^2} + (\lambda + d\lambda)\mathfrak{w} + (\gamma_1 + d\gamma_1)\Phi_1(z)\mathfrak{w} + (\gamma_2 + d\gamma_2)\Phi_2(z)\mathfrak{w} = 0.$$

ndem wir Produkte infinitesimaler Größen vernachlässigen und Gleichung (1) erücksichtigen, entsteht:

16) $$\frac{d^2\mathfrak{w}_1}{dz^2} + (\lambda + \gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2)\mathfrak{w}_1 = -w\cdot d\lambda - w\cdot\Phi_1\cdot d\gamma_1 - w\cdot\Phi_2\cdot d\gamma_2.$$

Die Funktion $\mathfrak{w}_1$ genügt, ebenso wie w, den Randbedingungen (2). Wir chreiben auch die zu (1) adjungierte Gleichung an:

1a) $$\frac{d^2w^*}{dz^2} + (\lambda + \gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2)w^* = 0,$$

o w^* die zu w adjungierte Eigenfunktion darstellt. Sie genügt den zu (2) djungierten Randbedingungen, welche aus (2) hervorgehen, wenn σ durch $1/\sigma$ rsetzt wird. Wir multiplizieren (16) mit w^* und (1a) mit $\mathfrak{w}_1$. Darauf inte- rieren wir von z_0 bis z_1 und bilden die Differenz der entstandenen leichungen:

$$\int_{z_0}^{z_1}\left(w^*\frac{d^2\mathfrak{w}_1}{dz^2} - \mathfrak{w}_1\frac{d^2w^*}{dz^2}\right)dz = -d\lambda\cdot\int_{z_0}^{z_1} w\,w^*\,dz -$$

$$-d\gamma_1\cdot\int_{z_0}^{z_1} w\,w^*\,\Phi_1(z)\,dz - d\gamma_2\cdot\int_{z_0}^{z_1} w\,w^*\,\Phi_2(z)\,dz.$$

Die linke Seite verschwindet (Greensche Formel) und wir erhalten, indem ir $d\lambda = (\partial\lambda/\partial\gamma_1)\cdot d\gamma_1 + (\partial\lambda/\partial\gamma_2)\cdot d\gamma_2$ setzen:

17) $$\frac{\partial\lambda}{\partial\gamma_1} = -\frac{\int_{z_0}^{z_1}\Phi_1(z)\,w\,w^*\,dz}{\int_{z_0}^{z_1} w\,w^*\,dz}; \quad \frac{\partial\lambda}{\partial\gamma_2} = -\frac{\int_{z_0}^{z_1}\Phi_2(z)\,w\,w^*\,dz}{\int_{z_0}^{z_1} w\,w^*\,dz}.$$

Im Falle, daß der Ausgangspunkt des λ-, γ_1-, γ_2-Raumes ein *zweifacher* igenwert der Hillschen Aufgabe ist, gehören zu ihm zwei Eigenfunktionen

w_1 und w_2. Wir haben in § 5 gezeigt, daß dieser Fall nur für $\sigma = \pm 1$ auftreten kann und für diese σ-Werte ist unsere Aufgabe selbstadjungiert, also $w \equiv w^*$. Wir werden in diesem Fall $\partial \lambda / \partial \gamma_1$ berechnen. An Stelle der Gleichung (16) erhalten wir jetzt (es sei: $d\gamma_2 \equiv 0$):

$$\text{(16 a)} \quad \frac{d^2 \mathfrak{w}_1}{dz^2} + (\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2)\, \mathfrak{w}_1 = -(d\lambda + \Phi_1 \cdot d\gamma_1)(a_1 w_1 + a_2 w_2),$$

wo a_1 und a_2 zunächst unbekannte Faktoren sind. An die Stelle der Gleichung (1) treten jetzt zwei Gleichungen, mit $w = w_1$ und mit $w = w_2$, beide mit den gleichen Werten λ, γ_1 und γ_2. Wir multiplizieren (16a) mit w_1 und die Gleichung (1) für w_1 mit $\mathfrak{w}_1$. Darauf integrieren wir von z_0 bis z_1 und bilden die Differenz der entstandenen Gleichungen. Mit Hilfe der Greenschen Formel entsteht:

$$a_1 \cdot d\lambda \cdot \int_{z_0}^{z_1} w_1^2\, dz + a_2 \cdot d\lambda \cdot \int_{z_0}^{z_1} w_1 w_2\, dz + a_1 \cdot d\gamma_1 \cdot \int_{z_0}^{z_1} \Phi_1 w_1^2\, dz + \\ + a_2 \cdot d\gamma_1 \cdot \int_{z_0}^{z_1} \Phi_1 w_1 w_2\, dz = 0.$$

Mit der zweiten Gleichung (1) für w_2 und der Gleichung (16a) verfahren wir analog und erhalten:

$$a_1 \cdot d\lambda \cdot \int_{z_0}^{z_1} w_1 w_2\, dz + a_2 \cdot d\lambda \cdot \int_{z_0}^{z_1} w_2^2\, dz + a_1 \cdot d\gamma_1 \cdot \int_{z_0}^{z_1} \Phi_1 w_1 w_2\, dz + \\ + a_2 \cdot d\gamma_1 \cdot \int_{z_0}^{z_1} \Phi_1 w_2^2\, dz = 0.$$

Die entstandenen beiden homogenen linearen Gleichungen für a_1 und a_2 haben nur dann eine nicht verschwindende Lösung, wenn die Determinante, gebildet aus den Koeffizienten von a_1 und a_2, verschwindet. Diese Bedingung liefert unmittelbar die gesuchte Gleichung für $\partial \lambda / \partial \gamma_1$:

$$\text{(17 a)} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_1} \bar{\alpha}_{11} + \bar{\beta}_{11} & \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_1} \bar{\alpha}_{12} + \bar{\beta}_{12} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_1} \bar{\alpha}_{21} + \bar{\beta}_{21} & \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_1} \bar{\alpha}_{22} + \bar{\beta}_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\bar{\alpha}_{kl} = \int_{z_0}^{z_1} w_k w_l\, dz;\ \bar{\beta}_{kl} = \int_{z_0}^{z_1} \Phi_1(z)\, w_k w_l\, dz;\ k, l = 1,2.$$

Die Größe $\partial \lambda / \partial \gamma_2$ kann ebenfalls aus Gleichung (17a) berechnet werden, indem $\partial \lambda / \partial \gamma_1$ durch $\partial \lambda / \partial \gamma_2$ und im Ausdruck $\bar{\beta}_{kl}$ die Funktion $\Phi_1(z)$ durch $\Phi_2(z)$ ersetzt wird. In diesem Fall ist nicht sofort ersichtlich, welche Werte von $\partial \lambda / \partial \gamma_1$ und $\partial \lambda / \partial \gamma_2$ jeweils zur gleichen Eigenwertfläche gehören. Wir können dies aber wie folgt erkennen. Es sei $\gamma_1 = \mu_1 \gamma$ und $\gamma_2 = \mu_2 \gamma$

ann entsteht für $\partial\lambda/\partial\gamma$ eine zu (17a) genau analoge Gleichung, in der aber $\bar{\beta}_{kl}$ die Bedeutung:

$$\bar{\beta}_{kl} = \int_{z_0}^{z_1} (\mu_1 \Phi_1 + \mu_2 \Phi_2)\, w_k\, w_l\, dz$$

t. Indem wir μ_1 und μ_2 alle reellen Werte erteilen, bewegen wir uns bei der Wurzel $\partial\lambda/\partial\gamma$ von (17a) in der entsprechenden Berührungsebene der treffenden Eigenwertfläche. Wir müssen demnach jene Werte $\partial\lambda/\partial\gamma_1$ d $\partial\lambda/\partial\gamma_2$ als zusammengehörig bezeichnen, bei denen die aus (17a) hervorhende Quadratwurzel *gleiches* Vorzeichen hat.

§ 8.

er Parameter λ als Funktion von γ_1 und γ_2 entlang den Eigenwertflächen, für die gilt: $|\sigma| = 1$.

Wir haben bereits im § 5 gesehen, daß λ für alle Eigenwertflächen eine alytische Funktion von γ_1 und γ_2 ist. Jetzt wollen wir einen Schritt weiterhen und zeigen, daß λ für jene Eigenwertflächen, für die $|\sigma| = 1$ ist, eine *ndeutige* Funktion von γ_1 und γ_2 ist. Anders gesagt: *Für diese Eigenwertächen mit* $|\sigma| = 1$ *ist* λ *eine ganze transzendente Funktion von* γ_1 *und von* γ_2.

Den Beweis führen wir dadurch, daß wir zeigen: Für $|\sigma| = 1$ sind $\partial\lambda/\partial\gamma_1$ d $\partial\lambda/\partial\gamma_2$ für alle endlichen Werte von γ_1 und γ_2 *endlich*. Im Falle einfacher genwerte geht dieser Satz unmittelbar aus Gleichung (17) hervor. Denn r $|\sigma| = 1$ ist w^* zu w konjugiert komplex und somit der Nenner beider Ausücke $\partial\lambda/\partial\gamma_1$ und $\partial\lambda/\partial\gamma_2$ positiv und $\neq 0$. Im Falle zweifacher Eigenwerte üssen wir von Gleichung (17a) ausgehen. Die genannten Differentialotienten sind hier stets endlich, falls $\bar{\alpha}_{11}\bar{\alpha}_{22} - \bar{\alpha}_{12}\bar{\alpha}_{21} \neq 0$. Ausschrieben lautet dieser Ausdruck:

$$\bar{\alpha}_{11}\bar{\alpha}_{22} - \bar{\alpha}_{12}\bar{\alpha}_{21} = \int_{z_0}^{z_1} w_1^2\, dz \cdot \int_{z_0}^{z_1} w_2^2\, dz - \Big[\int_{z_0}^{z_1} w_1\, w_2\, dz\Big]^2$$

d infolge der Schwarzschen Ungleichung ist er stets >0, falls w_1 und w_2 near unabhängig sind. Im Falle, daß diese Voraussetzung nicht zutrifft, aber der Eigenwert einfach und haben wir bereits oben gesehen, daß $\lambda/\partial\gamma_1$ und $\partial\lambda/\partial\gamma_2$ stets endlich sind.

Weil wir in § 5 gesehen haben, daß Treffpunkte von Eigenwertflächen r für $\sigma = \pm 1$ auftreten können und weil für diese σ-Werte λ eine ganze nktion von γ_1 und γ_2 ist, können wir schließen, *daß nie eine Eigenwertfläche t sich selber zusammentreffen kann*. Denn eine solche Fläche könnte nicht rch eine eindeutige Funktion λ von γ_1 und γ_2 dargestellt werden.

Wir bemerken, daß obiger Schluß, λ sei eine ganze Funktion von γ und γ_2, auch auf die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \{\lambda \cdot \psi(z) + \gamma_1 \cdot \Phi_1(z) + \gamma_2 \cdot \Phi_2(z)\} w(z) = 0$$

mit den obigen Randbedingungen (2) ausgedehnt werden kann, falls di Funktion $\psi(z)$ im Bereich $z_0 \leqq z \leqq z_1$ das Vorzeichen nicht ändert.

Im besonderen Fall, daß $\Phi_1(z)$ im Bereich $z_0 \leqq z \leqq z_1$ das Vorzeiche nicht ändert, ist für $|\sigma| = 1$ nach (17) auch γ_1 eine ganze Funktion von für jeden festen Wert von γ_2. Entsprechendes läßt sich aus (17a) schließen Falls $\Phi_2(z)$ das Vorzeichen nicht ändert, gilt das gleiche für γ_2 als Funktio von λ bei festem γ_1.

Unter bestimmten Einschränkungen können wir auch für $|\sigma| \neq$ schließen, daß λ eine ganze Funktion von γ_1 und γ_2 ist. Es sei in Gleichung (1) $\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2 < 0$ im Bereich $z_0 \leqq z \leqq z_1$ und σ positiv. Dann wechsel w und w^* in diesem Bereich das Vorzeichen nicht und unser Satz folgt hie somit unmittelbar aus Gleichung (17).

§ 9.

Berechnung der zweiten Ableitungen von λ nach γ_1 und γ_2 entlang den Eigenwertflächen.

Wir setzen voraus, daß ein einfacher Eigenwert vorliegt. Als erste Schritt zur Berechnung der zweiten Differentialquotienten ermitteln wir di Änderung $\mathfrak{w}_1$ der Eigenfunktion w. Für konstante Werte von γ_1 und γ_2 solle abzählbar unendlich viele Eigenwerte λ_k ($k = 0, 1, 2, 3, \ldots$) zum vorgegebene σ-Wert, mit den entsprechenden Eigenfunktionen w_k vorhanden sein. Dies Eigenfunktionen sollen einen *vollständigen Satz* bilden und wir entwickeln $\mathfrak{w}$ nach diesen Funktionen w_k in eine absolut und gleichmäßig konvergent Reihe (die Möglichkeit dieser Entwicklung ergibt sich aus den Eigenschafte von $\mathfrak{w}_1$, vgl. Verslagen Ned. Akademie van Wetenschappen **52** (1943), Nr. und 9):

$$\mathfrak{w}_1 = d\gamma_1 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A_k w_k(z) + d\gamma_2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} B_k w_k(z). \tag{18}$$

Diese Reihe setzen wir in (16) ein und schreiben λ_n an Stelle von λ und w an Stelle von w. Unter Berücksichtigung von (1) entsteht:

$$\begin{cases} d\gamma_1 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_k) A_k w_k + d\gamma_2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_k) B_k w_k \\ \qquad = - w_n \cdot d\lambda - w_n \Phi_1(z) \cdot d\gamma_1 - w_n \Phi_2(z) \cdot d\gamma_2. \end{cases} \tag{19}$$

ndem wir (19) mit w_k^*, der zu w_k adjungierten Eigenfunktion, multiplizieren, on z_0 bis z_1 integrieren und die Biorthogonalität[1]):

$$\int_{z_0}^{z_1} w_k(z) \cdot w_l^*(z)\, dz = 0 \quad \text{für } k \neq l$$

owie (17) berücksichtigen, entstehen die Gleichungen:

$$A_k = \frac{\int_{z_0}^{z_1} \Phi_1(z) \cdot w_n(z) \cdot w_k^*(z) \cdot dz}{(\lambda_k - \lambda_n) \int_{z_0}^{z_1} w_k(z) \cdot w_k^*(z) \cdot dz} \quad \text{für } k \neq n;$$

$$B_k = \frac{\int_{z_0}^{z_1} \Phi_2(z) \cdot w_n(z) \cdot w_k^*(z) \cdot dz}{(\lambda_k - \lambda_n) \int_{z_0}^{z_1} w_k(z) \cdot w_k^*(z) \cdot dz} \quad \text{für } k \neq n.$$

Die Koeffizienten A_n und B_n sind zunächst unbestimmt ($= 0/0$), werden ber infolge der Normierung:

$$\int_{z_0}^{z_1} \mathfrak{w} \cdot \mathfrak{w}^* \cdot dz = \int_{z_0}^{z_1} w \cdot w^* \cdot dz = 1,$$

o $\mathfrak{w}^*$ die zu $\mathfrak{w}$ adjungierte Eigenfunktion darstellt, gleich Null.

Wir erweitern jetzt (16) mit den zunächst vernachlässigten Gliedern . Ordnung:

16b) $$\frac{d^2 \mathfrak{w}_1}{dz^2} + (\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2)\, \mathfrak{w}_1 = -w \cdot d\lambda - \mathfrak{w}_1 \cdot d\lambda - w\Phi_1 \cdot d\gamma_1 - \\ - \mathfrak{w}_1 \Phi_1 \cdot d\gamma_1 - w\Phi_2 \cdot d\gamma_2 - \mathfrak{w}_1 \Phi_2 \cdot d\gamma_2,$$

etzen:

$$d\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_1} d\gamma_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_2} d\gamma_2 + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \gamma_1^2} (d\gamma_1)^2 + 2 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_2} d\gamma_1\, d\gamma_2 + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \gamma_2^2} \cdot (d\gamma_2)^2$$

nd führen (18) in (16b) ein. Da die Glieder 1. Ordnung bereits oben behandelt urden, können wir uns auf die Glieder 2. Ordnung beschränken. Wir fassen eweils die mit $(d\gamma_1)^2$, $(d\gamma_2)^2$ und $d\gamma_1 \cdot d\gamma_2$ multiplizierten Glieder zusammen nd erhalten:

20) $$w_n \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \gamma_1^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A_k w_k + \Phi_1 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A_k w_k = 0;$$

21) $$w_n \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \gamma_2^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} B_k w_k + \Phi_2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} B_k w_k = 0;$$

22) $$2 w_n \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_2} + \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A_k w_k + \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_1} \sum_{k=0}^{\infty} B_k w_k + \\ + \Phi_1 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} B_k w_k + \Phi_2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A_k w_k = 0.$$

Wir multiplizieren (20) mit w_n^*, integrieren von z_0 bis z_1 und berücksichtigen (17). Es ergibt sich:

$$(23) \qquad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \gamma_1^2} = \sum_{k=0}^{\infty}{}' \frac{\int_{z_0}^{z_1} \Phi_1(z)\, w_k^*\, w_n\, dz \cdot \int_{z_0}^{z_1} \Phi_1(z)\, w_k\, w_n^*\, dz}{(\lambda_n - \lambda_k) \int_{z_0}^{z_1} w_n\, w_n^*\, dz \cdot \int_{z_0}^{z_1} w_k\, w_k^*\, dz},$$

wo das Akzent beim Summenzeichen andeutet, daß das Glied $n = k$ nicht auftritt. Weiter ergibt sich in analoger Weise aus (21):

$$(24) \qquad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \gamma_2^2} = \sum_{k=0}^{\infty}{}' \frac{\int_{z_0}^{z_1} \Phi_2(z)\, w_k^*\, w_n\, dz \cdot \int_{z_0}^{z_1} \Phi_2(z)\, w_k\, w_n^*\, dz}{(\lambda_n - \lambda_k) \int_{z_0}^{z_1} w_n\, w_n^*\, dz \cdot \int_{z_0}^{z_1} w_k\, w_k^*\, dz}$$

und aus (22):

$$(25) \qquad 2\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \gamma_1\, \partial \gamma_2} = \sum_{k=0}^{\infty}{}' \frac{\int_{z_0}^{z_1} \Phi_2\, w_k^*\, w_n\, dz \cdot \int_{z_0}^{z_1} \Phi_1\, w_k\, w_n^*\, dz}{(\lambda_n - \lambda_k) \int_{z_0}^{z_1} w_n\, w_n^*\, dz \cdot \int_{z_0}^{z_1} w_k\, w_k^*\, dz} + \sum_{k=0}^{\infty}{}' \frac{\int_{z_0}^{z_1} \Phi_1\, w_k^*\, w_n\, dz \cdot \int_{z_0}^{z_1} \Phi_2\, w_k\, w_n^*\, dz}{(\lambda_n - \lambda_k) \int_{z_0}^{z_1} w_n\, w_n^*\, dz \cdot \int_{z_0}^{z_1} w_k\, w_k^*\, dz}.$$

Besondere Fälle obiger Gleichungen (23), (24) und (25), für selbstadjungierte Aufgaben, wurden bereits von anderer Seite behandelt[7]).

Im Falle, daß wir von einem zweifachen Eigenwert unserer Aufgabe ausgehen, müssen wir zunächst aus (17a) die zwei Werte von $\partial\lambda/\partial\gamma_1$ sowie die entsprechenden Werte von $\partial\lambda/\partial\gamma_2$ berechnen. Darauf ergeben sich aus den homogenen linearen Gleichungen für a_1 und a_2 im Falle von $\partial\lambda/\partial\gamma_1$ und in einem von $\partial\lambda/\partial\gamma_2$ je zwei Sätze zusammengehöriger Werte dieser Koeffizienten und diese führen jeweils auf zwei verschiedene Eigenfunktionen $w_n = a_1 w_1 + a_2 w_2$, welche in den beiden Fällen im allgemeinen verschieden sind. Einsetzen dieser Eigenfunktionen w_n in (23), (24) und (25) ergibt je zwei Werte für diese Differentialquotienten. Diese können auch zusammenfallen, falls (17a) zwei zusammenfallende Wurzeln hat. Bei der Berechnung dieser Größen aus (20), (21) und (22) ist darauf zu achten, daß die beiden Eigenfunktionen, welche jeweils zur γ_1-Richtung gehören, zueinander orthogonal sind, und das gleiche gilt auch für die Eigenfunktionen, welche zur γ_2-Richtung gehören. Welche Eigenfunktionen dieser beiden Richtungen jeweils zur gleichen Eigenwertfläche gehören, ergibt sich nach der Bemerkung am Schluß von § 7.

[7]) Vgl. z. B. E. Kamke, Differentialgleichungen, S. 228. Leipzig, Akademische Verlag, 1942; E. Schrödinger, Ann. d. Phys. **80** (1926), S. 440.

§ 10.

Lagenordnung der Eigenwertflächen.

O. Haupt[8]) hat auf Grund der Oszillationssätze bewiesen, daß bei konstanten Werten γ_1 und γ_2 und von $-\infty$ bis ∞ wachsendem λ zunächst ein einfacher ganzperiodischer ($\sigma = +1$) Eigenwert auftritt, dann zwei halbperiodische ($\sigma = -1$), darauf zwei ganzperiodische Eigenwerte usw. Zwischen zwei benachbarten gleichartigen periodischen Eigenwerten ist σ reell und $|\sigma| \geqq 1$, zwischen zwei benachbarten ungleichartigen periodischen Eigenwerten ist σ komplex und $|\sigma| = 1$. H. A. Kramers[9]) hat diese Sätze in elementarer Weise und verschärfter Form hergeleitet, indem er zeigte, daß der Ausdruck in geschweiften Klammern der Gleichung (15), den wir mit f bezeichnen, für $\partial f/\partial\lambda = 0$ der Ungleichung $|f| \geqq 2$ genügt und daß dann $\partial^2 f/\partial\lambda^2$ das Vorzeichen von $-f$ hat. Hieraus geht hervor: Falls zwischen benachbarten gleichartig periodischen Eigenwerten ein λ-Eigenwert zu einem vorgegebenen reellen σ-Wert auftritt, so liegt im genannten λ-Bereich ein und nur ein zweiter Eigenwert zum gleichen σ, außer im Fall, daß für den erstgenannten Eigenwert gilt: $\partial f/\partial\lambda = 0$. Zwischen zwei ungleichartigen periodischen Eigenwerten liegt zu jedem komplexen σ mit $|\sigma| = 1$ ein und nur ein λ-Eigenwert.

Wir wollen diese für jeweils konstante γ_1- und γ_2-Werte abgeleiteten Sätze auf veränderliche Werte dieser Parameter unter der Voraussetzung beschränkter Funktionen Φ_1 und Φ_2 erweitern. Hierzu gehen wir von einem beliebigen Punkt $\Lambda_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ des $\lambda, \gamma_1, \gamma_2$-Raumes aus und ziehen die Verbindungsgerade von diesem Punkt nach einem weiteren Punkt $\lambda, \gamma_1, \gamma_2$ dieses Raumes. Diese Gerade entsteht durch den Schnitt zweier Ebenen: $\gamma_1 - \Gamma_1 = (\lambda - \Lambda_0)\operatorname{tg}\varphi_1$ und $\gamma_2 - \Gamma_2 = (\lambda - \Lambda_0)\cdot\operatorname{tg}\varphi_2$. Wir rechnen diese Winkel φ_1 und φ_2 positiv für $\gamma_1 > \Gamma_1$, $\gamma_2 > \Gamma_2$ und $\lambda > \Lambda_0$ und zählen sie von der λ-Achse aus. Die Gleichung (1) schreibt sich mit Hilfe dieser Größen:

$$26)\quad \left\{ \frac{d^2 w}{dz^2} - \Lambda_0 \Phi_1 w \operatorname{tg}\varphi_1 - \Lambda_0 \Phi_2 w \operatorname{tg}\varphi_2 + \Gamma_1 \Phi_1 w + \Gamma_2 \Phi_2 w + \right. \\ \left. + \lambda w (1 + \Phi_1 \operatorname{tg}\varphi_1 + \Phi_2 \operatorname{tg}\varphi_2) = 0. \right.$$

Wir machen nun mit einigen geringfügigen Änderungen von der Rechenweise Gebrauch, die H. A. Kramers[9]) verwendet hat. Wenn w_1 und w_2 zwei beliebige linear unabhängige Lösungen von (26) darstellen, ergibt sich für f die Formel:

$$27)\quad cf = \begin{vmatrix} w_1(z_1) w_2(z_1) \\ w_1'(z_0) w_2'(z_0) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} w_1'(z_1) w_2'(z_1) \\ w_1(z_0) w_2(z_0) \end{vmatrix}; \quad c = \begin{vmatrix} w_1(z) w_1'(z) \\ w_2(z) w_2'(z) \end{vmatrix},$$

wo Akzente Differentiation nach z bezeichnen. Zur Berechnung von $\partial f/\partial\lambda$ müssen wir $\partial w/\partial\lambda$ und $\partial w'/\partial\lambda$ ermitteln, wo w eine der Lösungen w_1 oder

[8]) O. Haupt, Math. Ann. **76** (1915), S. 67—104; **79** (1919), S. 278—285.
[9]) H. A. Kramers, Physica, Haag, **2** (1935), S. 483—490.

w_2 bezeichnet. Die Funktion $\partial w/\partial \lambda \equiv w_\lambda$ genügt der aus (26) hervorgehenden unhomogenen Gleichung:

$$\frac{d^2 w_\lambda}{dz^2} + w_\lambda [- A_0 \Phi_1 \operatorname{tg}\varphi_1 - A_0 \Phi_2 \operatorname{tg}\varphi_2 + \Gamma_1 \Phi_1 + \Gamma_2 \Phi_2 + \\ + \lambda (1 + \Phi_1 \operatorname{tg}\varphi_1 + \Phi_2 \operatorname{tg}\varphi_2)] = - w (1 + \Phi_1 \operatorname{tg}\varphi_1 + \Phi_2 \operatorname{tg}\varphi_2)$$

Wir bestimmen eine Lösung w_λ dieser inhomogenen linearen Differentialgleichung, welche den Anfangsbedingungen $w_\lambda(z_0) = 0$ und $w'_\lambda(z_0) = 0$ genügt (Akzent bezeichnet Differentiation nach z). Diese Lösung wird durch

$$(28) \quad w_\lambda = \frac{1}{c} \int_{z_0}^{z} \begin{vmatrix} w_1(z) & w_2(z) \\ w_1(\mathfrak{z}) & w_2(\mathfrak{z}) \end{vmatrix} w(\mathfrak{z}) \cdot [1 + \Phi_1(\mathfrak{z}) \cdot \operatorname{tg}\varphi_1 + \Phi_2(\mathfrak{z}) \cdot \operatorname{tg}\varphi_2] \, d\mathfrak{z}$$

dargestellt. Wegen der angeführten Anfangsbedingungen der Funktion w_λ brauchen wir beim Differenzieren von (27) nach λ nur $w_1(z_1)$, $w'_1(z_1)$, $w_2(z_1)$, $w'_2(z_1)$ als Veränderliche zu betrachten und erhalten nach leichter Rechnung

$$(29) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \lambda} = - \alpha_{21} J_{11} + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) J_{12} + \alpha_{12} J_{22}, \\ \text{wo:} \\ k, l = 1,2; \; J_{kl} = \dfrac{1}{c} \displaystyle\int_{z_0}^{z_1} w_k(z) \, w_l(z) \, [1 + \Phi_1(z) \cdot \operatorname{tg}\varphi_1 + \Phi_2(z) \cdot \operatorname{tg}\varphi_2] \, dz \end{cases}$$

und wo:

$$(30) \quad \begin{cases} c\alpha_{11} = \begin{vmatrix} w_1(z_1) & w'_1(z_1) \\ w_2(z_0) & w'_2(z_0) \end{vmatrix}; \quad c\alpha_{12} = - \begin{vmatrix} w_1(z_1) & w'_1(z_1) \\ w_1(z_0) & w'_1(z_0) \end{vmatrix}; \\ c\alpha_{22} = - \begin{vmatrix} w_2(z_1) & w'_2(z_1) \\ w_1(z_0) & w'_1(z_0) \end{vmatrix}; \quad c\alpha_{21} = \begin{vmatrix} w_2(z_1) & w'_2(z_1) \\ w_2(z_0) & w'_2(z_0) \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Nochmaliges Differenzieren von (29) nach λ führt unter Berücksichtigung von (27) und (28) zur Formel:

$$(31) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} = - f (J_{11} J_{22} - J_{12}^2) - \alpha_{21} \frac{\partial J_{11}}{\partial \lambda} + \\ + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) \frac{\partial J_{12}}{\partial \lambda} + \alpha_{12} \frac{\partial J_{22}}{\partial \lambda}.$$

Wenn λ im Betrag sehr groß: $\zeta^2 |\lambda| \gg 1$ und negativ ist, werden wegen (26), *falls die Winkel* φ_1 *und* φ_2 *derart gewählt werden, daß der Klammerausdruck* ψ, *mit dem* λ *multipliziert ist, für alle* z *positiv und* $\neq 0$ *wird*, die Funktionen $w_1(z)$ und $w_2(z)$ angenähert[10]):

$$w_1 \approx \psi^{-1/4} \cdot e^{-\sqrt{|\lambda|} \int_{z_0}^{z} \psi^{1/2} dz} \quad \text{und} \quad w_2 \approx \psi^{-1/4} \cdot e^{+\sqrt{|\lambda|} \int_{z_0}^{z} \psi^{1/2} dz},$$

wo:

$$\psi = 1 + \Phi_1 \operatorname{tg}\varphi_1 + \Phi_2 \operatorname{tg}\varphi_2.$$

[10]) R. Courant u. D. Hilbert, Methoden d. math. Physik, Bd. 1, 1. Aufl. S. 335 u. 368.

Folglich ist hier:

$$f \approx e^{\sqrt{|\lambda|}\int_{z_0}^{z_1} \psi^{1/2}\,dz} \tag{32a}$$

und somit f positiv und im Betrag sehr groß. Für sehr große positive λ-Werte $^2\lambda \gg 1$ wird:

$$w_1 \approx \psi^{-1/4} \cdot \cos\left\{\sqrt{\lambda}\int_{z_0}^{z} \psi^{1/2}\,dz\right\} \quad \text{und} \quad w_2 \approx \psi^{-1/4} \cdot \sin\left\{\sqrt{\lambda}\int_{z_0}^{z} \psi^{1/2}\,dz\right\},$$

Also:

$$f \approx 2\cos\left(\sqrt{\lambda}\int_{z_0}^{z_1} \psi^{1/2}\,dz\right). \tag{32b}$$

Für λ von $-\infty$ bis ∞ wachsend fängt f demnach mit sehr großen positiven Werten an, sinkt und erreicht ein Minimum, darauf ein Maximum usw., um schließlich dem pendelnden Wert (32b) zuzustreben.

Für $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\Gamma_1 = 0$ und $\Gamma_2 = 0$ nimmt der Punkt $\lambda = 0$ des λ-, γ_1-, γ_2-Raumes eine Ausnahmestellung ein. Hier ist $\partial f/\partial\lambda = 0$ und $\partial^2 f/\partial\lambda^2$ wechselt das Vorzeichen (positiv für negatives λ und negativ für positives λ). Für diesen Punkt gelten unsere nächsten Betrachtungen bezüglich $\partial^2 f/\partial\lambda^2$ nicht.

Wir wollen nun dartun, daß für $\partial f/\partial\lambda = 0$ stets gilt: $|f| \geqq 2$. Die Lösungen w_1 und w_2 enthalten je zwei zunächst willkürliche Konstanten, von denen je eine zur Normierung dient und die zweite noch frei wählbar ist. Wir wählen sie derart, daß $J_{12} = 0$. Die Winkel φ_1 und φ_2 seien wieder derart gewählt, daß $1 + \Phi_1 \operatorname{tg}\varphi_1 + \Phi_2 \operatorname{tg}\varphi_2$ für alle z positiv ist. Dann haben J_{11} und J_{22} und folglich für $\partial f/\partial\lambda = 0$ auch α_{12} und α_{21} gleiches Vorzeichen. Da stets gilt: $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = 1$, ist $\alpha_{11}\alpha_{22} \geqq 1$ und folglich ist $|f| = |\alpha_{11} + \alpha_{22}| \geqq 2$. Weiter wollen wir zeigen, daß für $\partial f/\partial\lambda = 0$ das Vorzeichen von $\partial^2 f/\partial\lambda^2$ gleich demjenigen von $-f$ ist. Hierzu wählen wir w_1 und w_2 derart, daß α_{12} und α_{21} verschwinden. Aus (29) geht dann für $\partial f/\partial\lambda = 0$ hervor:

$$(\alpha_{11} - \alpha_{22})\,J_{12} = 0.$$

Wir nehmen zunächst an, daß $|f| > 2$ ist. Dann ist wegen $|f| = |\alpha_{11} + \alpha_{22}|$ und $\alpha_{11}\alpha_{22} = 1 + \alpha_{12}\alpha_{21} = 1$ offenbar $\alpha_{11} - \alpha_{22} \neq 0$ und folglich $J_{12} = 0$. Hierdurch erhalten wir aus (31):

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda^2}\right)_{\text{für } \frac{\partial f}{\partial\lambda} = 0} = -f J_{11} J_{22} + (\alpha_{11} - \alpha_{22})\frac{\partial J_{12}}{\partial\lambda}.$$

Es ist: $|\alpha_{11}-\alpha_{22}|<|\alpha_{11}+\alpha_{22}|=|f|$, da $\alpha_{11}\alpha_{22}=1$, und wir können auch zeigen, daß $|\partial J_{12}/\partial\lambda|<J_{11}J_{22}$ ist (es sei $\psi=1+\Phi_1\operatorname{tg}\varphi_1+\Phi_2\operatorname{tg}\varphi_2$):

$$\frac{\partial J_{12}}{\partial\lambda}=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial\lambda}\int_{z_0}^{z_1}w_1(z)\cdot w_2(z)\cdot\psi(z)\cdot dz$$

$$=\frac{1}{c}\int_{z_0}^{z_1}\{w_{1\lambda}(z)\cdot w_2(z)+w_1(z)\cdot w_{2\lambda}(z)\}\,\psi(z)\cdot dz$$

$$=\frac{1}{c^2}\int_{z_0}^{z_1}dz\int_{z_0}^{z}d\mathfrak{z}\cdot\psi(z)\cdot\begin{vmatrix}w_1(z)w_2(z)\\ w_1(\mathfrak{z})w_2(\mathfrak{z})\end{vmatrix}\cdot\psi(\mathfrak{z})\{w_1(\mathfrak{z})w_2(z)+w_1(z)\cdot w_2(\mathfrak{z})\}$$

$$=\frac{1}{c^2}\int_{z_0}^{z_1}dz\int_{z_0}^{z}d\mathfrak{z}\cdot\psi(z)\cdot\psi(\mathfrak{z})\cdot\{w_1^2(z)\,w_2^2(\mathfrak{z})-w_1^2(\mathfrak{z})\,w_2^2(z)\}.$$

Folglich ist:

$$\left|\frac{\partial J_{12}}{\partial\lambda}\right|<\frac{1}{c^2}\int_{z_0}^{z_1}\psi(z)\,dz\int_{z_0}^{z}\psi(\mathfrak{z})\cdot d\mathfrak{z}\cdot\{w_1^2(\mathfrak{z})w_2^2(z)+w_1^2(z)w_2^2(\mathfrak{z})\}$$

$$=\frac{1}{c^2}\int_{z_0}^{z_1}w_1^2(\mathfrak{z})\,\psi(\mathfrak{z})\,d\mathfrak{z}\int_{z_0}^{z_1}w_2^2(z)\,\psi(z)\,dz=J_{11}J_{22}.$$

Im Falle, daß $|f|=2$, gilt für $\alpha_{12}=\alpha_{21}=0$ wegen $\alpha_{11}\alpha_{22}=1$ die Gleichung $\alpha_{11}=\alpha_{22}$, und wir erhalten aus (31):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda^2}=-f(J_{11}J_{22}-J_{12}^2).$$

Nach der Schwarzschen Ungleichung ist:

$$J_{11}J_{22}-J_{12}^2=\frac{1}{c^2}\int_{z_0}^{z_1}w_1^2(z)\,\psi(z)\cdot dz\cdot\int_{z_1}^{z_1}w_2^2(z)\,\psi(z)\cdot dz-$$

$$-\frac{1}{c^2}\left[\int_{z_0}^{z_1}w_1(z)w_2(z)\,\psi(z)\,dz\right]^2>0,$$

falls w_1 und w_2 linear unabhängig sind, was wir ja vorausgesetzt haben. Folglich ist allgemein für $\partial f/\partial\lambda=0$ die Ungleichung $|f|\geqq 2$ erfüllt und für $f\geqq 2$ sowie $\partial f/\partial\lambda=0$ das Vorzeichen von $\partial^2 f/\partial\lambda^2$ gleich dem von $-f$, falls $\psi=1+\Phi_1\operatorname{tg}\varphi_1+\varphi_2\operatorname{tg}\varphi_2$ für alle z positiv ist. Die oben für konstante Werte von γ_1 und γ_2 angegebenen Sätze gelten demnach auch entlang den hier betrachteten Geraden, welche durch die Winkel φ_1 und φ_2 bestimmt werden.

Man kann leicht zeigen, daß es für Winkel, welche dieser Bedingung *icht* genügen, Gerade gibt, entlang denen eine andere Lagenordnung der igenwerte gilt. Ein Beispiel hierzu liefert die MATHIEUsche Gleichung (Ergebn. . Math. I, H. 3, S. 24). Die genannte Bedingung ist somit nicht nur hin-eichend, sondern auch notwendig.

§ 11.

Verlauf der Eigenwertflächen in der Umgebung der λ-Achse.

Auf der λ-Achse sind nur für $\lambda < 0$ Eigenwerte zu reellen σ-Werten mit $\sigma| > 1$ vorhanden. Für $\lambda > 0$ sind die Punkte $\zeta \sqrt{\lambda} = n\pi$; $n = 1, 2, 3, \ldots$ weifache Eigenwerte, und zwar für ungerade n halbperiodische und für erade n ganzperiodische Eigenwerte. Durch jeden dieser Punkte gehen zwei igenwertflächen. Durch den Punkt $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\lambda = 0$ geht eine einzige läche, da er einen einfachen ganzperiodischen Eigenwert darstellt. Für alle unkte der λ-Achse außer $\zeta \sqrt{\lambda} = n\pi$; $n = 1, 2, 3 \ldots$ gilt

$$\zeta \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_1} = -\int_{z_0}^{z_1} \Phi_1(z)\, dz; \quad \zeta \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_2} = -\int_{z_0}^{z_1} \Phi_2(z)\, dz, \tag{33}$$

a hier ww^* gleich einer Konstanten wird. Diese Gleichungen (33) bestimmen ie Berührungsebene der Eigenwertfläche im betreffenden Punkt der λ-Achse. Venn wir insbesondere den Punkt $\lambda = 0$ ins Auge fassen, so sind für $\partial\lambda/\partial\gamma_1 > 0$ und $\partial\lambda/\partial\gamma_2 > 0$ positive γ_1- und γ_2-Werte vorhanden, für die s nur positive Eigenwerte λ gibt. Analog gibt es für $\partial\lambda/\partial\gamma_1 < 0$ und $\partial\lambda/\partial\gamma_2 > 0$ positive γ_2- und zugleich negative γ_1-Werte dieser Eigenschaft usw.

In den Punkten $\zeta \sqrt{\lambda} = n\pi$; $n = 1, 2, 3 \ldots$ müssen $\partial\lambda/\partial\gamma_1$ und $\partial\lambda/\partial\gamma_2$ us (17a) berechnet werden. Für diese Größen ergeben sich je zwei ver-chiedene oder zwei zusammenfallende Werte, je nachdem die Diskriminante D on (17a) nicht oder wohl verschwindet. Wegen $\bar{\alpha}_{12} = \bar{\alpha}_{21} = 0$ und $\bar{\beta}_{12} = \bar{\beta}_{21}$ ilt hier:

$$D = \left(\frac{\bar{\beta}_{22}}{\bar{\alpha}_{22}} - \frac{\bar{\beta}_{11}}{\bar{\alpha}_{11}}\right)^2 + 4\frac{\bar{\beta}_{12}^2}{\bar{\alpha}_{11}\bar{\alpha}_{22}}. \tag{34}$$

Vir nennen Δ_{11} und Δ_{12} die beiden Werte von $\partial\lambda/\partial\gamma_1$ und analog Δ_{21} und $_{22}$ die beiden Werte von $\partial\lambda/\partial\gamma_2$. Dann lauten die Gleichungen der beiden erührungsebenen der Eigenwertflächen in den zweifachen Eigenwertpunkten Λ er λ-Achse:

$$\begin{cases} \lambda = \Lambda + \Delta_{11}\gamma_1 + \Delta_{21}\gamma_2; \\ \lambda = \Lambda + \Delta_{12}\gamma_1 + \Delta_{22}\gamma_2. \end{cases} \tag{35}$$

Dieses Gleichungspaar bestimmt die *Berührungsgerade der Schnittkurve oder Berührungskurve* beider Eigenwertflächen durch den betreffenden Punkt der λ-Achse. Welche Werte Δ jeweils in einer der Gleichungen (35) zusammengehören, ist am Schluß von § 7 auseinandergesetzt. Der betreffende Punkt der λ-Achse ist ein isolierter Berührungspunkt der beiden Eigenwertflächen, falls die Gleichung (17a) für $\partial\lambda/\partial\gamma$, wo $\gamma_1 = \mu_1\gamma$ und $\gamma_2 = \mu_2\gamma$ sowie:

$$\bar{\beta}_{kl} = \int_{z_0}^{z_1} (\mu_1\Phi_1 + \mu_2\Phi_2)\, w_k w_l\, dz$$

für alle reellen Werte von μ_1 und μ_2 je zwei zusammenfallende Wurzeln aufweist.

§ 12.

Verlauf der Eigenwertflächen im großen.

Nach § 3 Gleichung (9) ist für $\gamma_1 = \mu_1\gamma$ und $\gamma_2 = \mu_2\gamma$ der n-te positive oder negative Eigenwert γ das Maximum-Minimum des Ausdrucks:

$$M = -\int_{z_0}^{z_1} w\left(\frac{d^2 w^*}{d z^2} + \lambda w^*\right) dz = \int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{d w}{d z}\frac{d w^*}{d z} - \lambda w w^*\right) dz \tag{36}$$

unter gewissen Nebenbedingungen. Für $|\sigma| = 1$ sind w und w^* konjugiert komplex und geht aus (36) hervor, daß M positiv definit ist für $\lambda \leqq 0$. Das gleiche können wir aus (9b) an Hand der Gleichung (4) schließen. In diesem λ-Bereich wird demnach der Betrag jedes Eigenwertes γ für $|\sigma| = 1$ größer (zumindest nicht kleiner), falls λ abnimmt. *Alle Eigenwertflächen für* $|\sigma| = 1$ *verlaufen demnach für* $-\infty < \lambda \leqq 0$ *derart, daß* $\gamma \cdot \partial\lambda/\partial\gamma$ *negativ ist, wo* $\gamma_1 = \mu_1\gamma$ *und* $\gamma_2 = \mu_2\gamma$ *gesetzt wurde.* Jede Ebene parallel zur γ_1-, γ_2-Ebene für $\lambda \leqq 0$ muß demnach jede der Eigenwertflächen für $|\sigma| = 1$ in einer einzigen ebenen analytischen, in sich im Endlichen *geschlossenen* Kurve schneiden. Im Falle $\int_{z_0}^{z_1} \Phi_1(z)\, dz = 0$ und gleichzeitig $\int_{z_0}^{z_1} \Phi_2(z)\, dz = 0$ berührt die γ_1-, γ_2-Ebene die Eigenwertfläche für $\sigma = +1$, welche durch den Punkt $\lambda = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$ hindurchgeht, in diesem Punkt.

Wir betrachten jetzt jene Eigenwertflächen für $|\sigma| = 1$, welche jeweils, wenn λ von $-\infty$ nach $+\infty$ wächst, zum *kleinsten* λ-Wert gehören. Für diese Flächen wird der betreffende Eigenwert λ nach § 3 Gleichung (6) und (7) als das Minimum des Ausdrucks:

$$\lambda = \frac{-\int_{z_0}^{z_1} w^* \cdot \frac{d^2 w}{d z^2}\, d z - \gamma \int_{z_0}^{z_1} (\mu_1\Phi_1 + \mu_2\Phi_2)\, w w^*\, dz}{\int_{z_0}^{z_1} w(z)\, w^*(z)\, dz} \tag{37}$$

r alle zweimal stetig differenzierbaren adjungierten Funktionen w und w^* halten, welche den Randbedingungen (2) bzw. den hierzu adjungierten Randedingungen, mit $1/\sigma$ an Stelle von σ genügen. Wenn für w und w^* die zu den ewählten Werten σ, μ_1, μ_2 und γ gehörigen Eigenfunktionen in (37) einesetzt werden, entsteht unmittelbar der dazugehörige Eigenwert λ. Wir önnen (37) aber, wenn wir wieder $\gamma_1 = \mu_1 \gamma$ und $\gamma_2 = \mu_2 \gamma$ einführen, auch auffassen, daß sie die Gleichung der *Berührungsebene* der Eigenwertfläche betrachteten Eigenwertpunkt $\lambda = \lambda_0, \gamma_1 = \Gamma_1, \gamma_2 = \Gamma_2$ darstellt, während γ_1 und γ_2 als veränderliche rechtwinklige Koordinaten gelten. Wenn wir uf dieser Berührungsebene bleiben, so ist zu jedem Wertepaar γ_1, γ_2 der ugehörige λ-Wert der obigen Minimumeigenschaft zufolge *größer* als der Eigenwert, der für diese γ_1 und γ_2 auf der Eigenwertfläche für den vorgegebenen σ-Wert liegt. Die Berührungsebenen können, da diese Eigenschaft r sie alle gilt, die zugehörigen Eigenwertflächen, außer im Berührungspunkt, cht schneiden oder berühren. *Die genannten Eigenwertflächen müssen also ets konvex nach der Seite der Berührungsebenen (d. h. nach wachsendem λ) krümmt sein.* Außer für $|\sigma| = 1$ gelten diese Überlegungen auch für jene igenwertflächen für reelle positive σ-Werte, für welche λ eine ganze transndente Funktion von γ_1 und von γ_2 ist (vgl. § 8). Hierzu gehören die Fälle, denen $\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2 < 0$ und $\sigma > +1$ ist[11]).

Wir können die Krümmung der obengenannten Eigenwertflächen in nigen einfachen Fällen an Hand der Gleichungen (23), (24) und (25) verlgen. Es sei z. B. $|\sigma| = 1$ und wir fassen den kleinsten Eigenwert λ_0 ins uge, der zu diesen σ gehört. Dann ergibt sich, da die beiden Ausdrücke im ähler jedes Gliedes von (23) und (24) konjugiert komplex zueinander sind, aß alle Glieder von (23) und (24) ein negatives Vorzeichen haben. Hierdurch nd somit die Vorzeichen von $\partial^2 \lambda / \partial \gamma_1^2$ und $\partial^2 \lambda / \partial \gamma_2^2$ in diesen Fällen festelegt. Aus (23), (24) und (25) lassen sich die *Krümmungsradien* der Eigenertflächen berechnen.

Die Berührungsgeraden aller Eigenwertflächen für komplexe σ-Werte lden stets Winkel φ_1 und φ_2 nach § 10 derart, daß $1 + \Phi_1 \operatorname{tg} \varphi_1 + \Phi_2 \operatorname{tg} \varphi_2$ *cht* für alle z positiv ist. Falls dieser Satz nicht gelten würde, könnten eraden angegeben werden, denen Winkel φ_1 und φ_2 entsprechen würden, r welche der Ausdruck $1 + \Phi_1 \operatorname{tg} \varphi_1 + \Phi_2 \operatorname{tg} \varphi_2$ überall positiv wäre und elche eine der genannten Eigenwertflächen zweimal schneiden würden, ohne vischen diesen Schnittpunkten eine Eigenwertfläche für reelles σ zu treffen. diesem Fall wäre zwischen diesen Schnittpunkten eine Nullstelle von

[11]) Eine analoge Schlußweise wie oben durchgeführt, wurde bereits von . Schaefer, ZS. f. angew. Math. Mech. 14 (1934), S. 367—368, sowie Diss. Hannover 934 (herausgegeben 1937) in anderen Fällen angewandt.

$\partial f/\partial\lambda$ auf der Geraden vorhanden, für die $|f| < 2$ wäre und dies ist mit der Lagenordnung der Eigenwertflächen nach § 10 im Widerspruch. Falls eine Eigenwertfläche für $\sigma = +1$ oder $= -1$ eine Berührungsgerade aufweist, deren Winkel φ_1 und φ_2 der Bedingung $1 + \Phi_1 \operatorname{tg}\varphi_1 + \Phi_2 \operatorname{tg}\varphi_2 \geqq 0$ für alle z genügen, so muß beiderseits des Berührungspunktes auf dieser Geraden $|f| < 2$ sein, wie aus der Lagenordnung der Eigenwertflächen nach § 10 hervorgeht.

Auf den Eigenwertflächen für reelle σ-Werte mit $|\sigma| \gtrless 1$ liegt für positive λ-Werte je mindestens eine Nullstelle von $\partial\gamma_1/\partial\lambda$ und von $\partial\gamma_2/\partial\lambda$. Dies geht aus den unteren Eigenwertschranken nach § 2 hervor. Entlang einer solchen Eigenwertfläche ändern sich bei monotonem Fortschreiten derart, daß γ_1, γ_2 und λ sich monoton ändern, von einer solchen Nullstelle aus $\partial\gamma_1/\partial\lambda$ und $\partial\gamma_2/\partial\lambda$ monoton, solange die Winkel φ_1 und φ_2 der Berührungsgeraden im betreffenden Punkt der Bedingung genügen, daß $1 + \Phi_1 \operatorname{tg}\varphi_1 + \Phi_2 \operatorname{tg}\varphi_2 \geqq 0$ ist. Falls der Satz nicht gelten würde, könnte man Geraden angeben, entlang denen im gleichen Punkt $\partial f/\partial\lambda = 0$ und $f \cdot \partial^2 f/\partial\lambda^2$ positiv wäre, was mit der Lagenordnung der Eigenwertflächen nach § 10 im Widerspruch stünde.

III. Asymptotischer Verlauf der Eigenwertflächen.

§ 13.

Asymptotische Integration der verallgemeinerten Hillschen Gleichung.

Die asymptotische Integration der Gleichung:

$$\frac{d^2 w}{d z^2} + \{\lambda + \gamma_1 \Phi_1(z) + \gamma_2 \Phi_2(z)\} w(z) = 0 \tag{1}$$

erfordert besondere Überlegungen, falls der Ausdruck in geschweiften Klammern im Grundbereich $z_0 \leqq z \leqq z_0 + \zeta = z_1$ Nullstellen aufweist. Diese ausführlich u. a. von R. E. Langer[12]) betrachteten Verhältnisse hängen direkt mit der Stokesschen Erscheinung zusammen, bei welcher beiderseits einer solchen Nullstelle auf der reellen z-Achse verschiedene asymptotische Darstellungen für die gleiche Funktion gelten. Wir setzen zunächst voraus, daß der Ausdruck in geschweiften Klammern im Grundbereich $z_0 \leqq z \leqq z_1$ die mit Rücksicht auf seine Periodizität kleinstmögliche von Null verschiedene Anzahl von Nullstellen aufweist, d. h. *zwei einfache Nullstellen*. Er sei negativ für $z_0 \leqq z \leqq \alpha_1$, positiv für $\alpha_1 \leqq z \leqq \alpha_2$ und negativ für $\alpha_2 \leqq z \leqq z_1$. Die

[12]) R. E. Langer, Trans. Amer. math. Soc. **36** (1934), S. 90—106; Bull. Amer. math. Soc. **40** (1934), S. 545—582.

ige Voraussetzung soll für Werte von λ, γ_1 und γ_2 gelten, welche der Un-
eichung:

$$\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} |\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2|^{1/2}\, dz \gg 1; \quad \alpha_3 = \alpha_1 + \zeta$$

tsprechen. Sie bedingt bestimmte Annahmen über den Verlauf der Funk-
nen $\Phi_1(z)$ und $\Phi_2(z)$ von z, auf die wir in § 15 noch näher eingehen werden.

In den genannten Bereichen gelten folgende asymptotische Dar-
ellungen[12]) der Lösungen von (1):

ir $z_0 \leqq z < \alpha_1$:

$$8) \quad w(z) \approx \frac{A_1 [1 + O(\sqrt{|\lambda|}\,\zeta + \sqrt{|\gamma_1|}\,\zeta + \sqrt{|\gamma_2|}\,\zeta)^{-1}]}{|\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2|^{1/4}} \times$$

$$\times \left\{ \sin \eta_1 \cdot e^{\int_z^{\alpha_1} |\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2|^{1/2}\, dz} + \frac{\cos \eta_1}{2} \cdot e^{-\int_z^{\alpha_1} |\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2|^{1/2}\, dz} \right\};$$

r $\alpha_1 < z < \alpha_2$:

$$9) \quad w(z) \approx \frac{A_1}{(\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2)^{1/4}} \cdot \cos \left\{ \int_{\alpha_1}^{z} (\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2)^{1/2}\, dz - \frac{\pi}{4} + \eta_1 \right\} +$$

$$+ O(\sqrt{|\lambda|}\,\zeta + \sqrt{|\gamma_1|}\,\zeta + \sqrt{|\gamma_2|}\,\zeta)^{-5/4};$$

r $\alpha_1 < z < \alpha_2$:

$$0) \quad w(z) \approx \frac{A_2}{(\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2)^{1/4}} \cdot \cos \left\{ \int_{z}^{\alpha_2} (\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2)^{1/2}\, dz - \frac{\pi}{4} + \eta_2 \right\} +$$

$$+ O(\sqrt{|\lambda|}\,\zeta + \sqrt{|\gamma_1|}\,\zeta + \sqrt{|\gamma_2|}\,\zeta)^{-5/4};$$

r $\alpha_2 < z < \alpha_3 = \alpha_1 + \zeta$:

$$1) \quad w(z) \approx \frac{A_2 [1 + O(\sqrt{|\lambda|}\,\zeta + \sqrt{|\gamma_1|}\,\zeta + \sqrt{|\gamma_2|}\,\zeta)^{-1}]}{|\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2|^{1/4}} \times$$

$$\times \left\{ \sin \eta_2 \cdot e^{\int_{\alpha_2}^{z} |\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2|^{1/2}\, dz} + \frac{\cos \eta_2}{2} \cdot e^{-\int_{\alpha_2}^{z} |\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2|^{1/2}\, dz} \right\}.$$

ir die Wahl der Konstanten A_1, A_2, η_1, η_2 und λ (oder γ_1, γ_2) haben wir
i gegebenem γ_1, γ_2 (oder λ) und σ die Bedingung, daß der zweite und dritte
ige Ausdruck im Bereich $\alpha_1 < z < \alpha_2$ identisch sein müssen, sowie die Be-
ngung $w(z + \zeta) = \sigma \cdot w(z)$, welche zusammen vier Gleichungen ergeben.
e letzte erforderliche Bestimmungsgleichung ergibt sich aus der Normierung
r Eigenfunktionen.

§ 14.

Asymptotische Eigenwertformeln bei zwei Nullstellen.

Wir schreiben:

$$\int_z^{\alpha_2}(\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2)^{1/2}\,dz=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}(\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2)^{1/2}\,dz-$$

$$-\int_{\alpha_1}^{z}(\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2)^{1/2}\,dz=\beta_1-\int_{\alpha_1}^{z}(\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2)^{1/2}\,d$$

und erhalten an Stelle von (40):

$$(40\,a)\quad w(z)\approx\frac{A_2}{(\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2)^{1/4}}\Big[\cos\Big\{\int_{\alpha_1}^{z}(\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2)^{1/2}\,dz\Big\}\cdot$$

$$\cdot\cos\Big\{-\beta_1+\frac{\pi}{4}-\eta_2\Big\}-\sin\Big\{\int_{\alpha_1}^{z}(\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2)^{1/2}\,dz\Big\}\cdot$$

$$\cdot\sin\Big\{-\beta_1+\frac{\pi}{4}-\eta_2\Big\}\Big]+O\left(\sqrt{|\lambda|}\,\zeta+\sqrt{|\gamma_1|}\,\xi+\sqrt{|\gamma_2|}\,\zeta\right)^{-5/4}$$

Die Gleichung (39) lautet ausgeschrieben:

$$(39\,a)\quad w(z)\approx\frac{A_1}{(\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2)^{1/4}}\Big[\cos\Big\{\int_{\alpha_1}^{z}(\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2)^{1/2}\,dz\Big\}\cdot$$

$$\cdot\cos\Big(\frac{\pi}{4}-\eta_1\Big)+\sin\Big\{\int_{\alpha_1}^{z}(\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2)^{1/2}\,dz\Big\}\cdot\sin\Big(\frac{\pi}{4}-\eta_1\Big)+$$

$$+O\left(\sqrt{|\lambda|}\,\zeta+\sqrt{|\gamma_1|}\,\zeta+\sqrt{|\gamma_2|}\,\zeta\right)^{-5/}$$

Das Verhältnis der Koeffizienten der veränderlichen cos- und sin-Gliede muß in Gleichung (39a) das gleiche sein wie in Gleichung (40a):

$$(42\,a)\qquad \operatorname{cotg}\Big(\frac{\pi}{4}-\eta_1\Big)=\operatorname{cotg}\Big(\beta_1-\frac{\pi}{4}+\eta_2\Big)$$

und auch die Koeffizienten selber müssen gleich sein, also:

$$(42\,b)\qquad A_1\cos\Big(\frac{\pi}{4}-\eta_1\Big)=A_2\cos\Big(\beta_1-\frac{\pi}{4}+\eta_2\Big).$$

In analoger Weise schreiben wir für $\alpha_3>z^*\geqq z_1$:

$$\int_{\alpha_2}^{z^*}|\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2|^{1/2}\,dz=\int_{\alpha_2}^{\alpha_3}|\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2|^{1/2}\,dz-$$

$$-\int_{z^*}^{\alpha_3}|\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2|^{1/2}\,d$$

$$=\beta_2-\int_{z^*}^{\alpha_3}|\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2|^{1/2}\,dz$$

nd in letzterem Integral können die Grenzen wegen der Periodizität von
$_1$ und Φ_2 durch z bis α_1 ersetzt werden, wenn $z^* = z + \zeta$. Folglich ergibt
ch aus (41):

1a) $$w(z^*) \approx \frac{A_2\,[1 + O(\sqrt{|\lambda|} + \sqrt{|\gamma_1|} + \sqrt{|\gamma_2|})^{-1}\,\zeta^{-1}]}{|\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2|^{1/4}} \Big\{ \sin \eta_2 \cdot e^{\beta_2 - \int_{\zeta}^{\alpha_1} |\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2|^{1/2}\, dz} + \frac{\cos \eta_2}{2} \cdot e^{-\beta_2 + \int_{z}^{\alpha_1} |\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2|^{1/2}\, dz} \Big\}.$$

amit $w(z^*) = \sigma \cdot w(z)$, müssen die Gleichungen:

3a) $$\sigma A_1 \sin \eta_1 = \frac{A_2}{2} \cos \eta_2\, e^{-\beta_2};$$

3b) $$\sigma \frac{A_1}{2} \cos \eta_1 = A_2 \sin \eta_2\, e^{\beta_2}$$

lten. Mit den oben eingeführten Bezeichnungen:

4) $$\beta_1 = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2)^{1/2}\, dz; \quad \beta_2 = \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} |\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2|^{1/2}\, dz$$

halten wir aus (43a) und (43b):

5) $$4 \operatorname{tg} \eta_1 = \operatorname{cotg} \eta_2 \cdot e^{-2\beta_2},$$

nd aus (42a):

6) $$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \eta_1\right) = \operatorname{cotg}\left(\beta_1 - \frac{\pi}{4} + \eta_2\right), \text{ oder } (n + \tfrac{1}{2})\,\pi - \eta_1 = \beta_1 + \eta_2,$$

o $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$.

Indem wir (43a) durch (42b) dividieren, ergibt sich:

$$\frac{\sigma \sin \eta_1}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \eta_1\right)} = \frac{\cos \eta_2 \cdot e^{-\beta_2}}{2 \cos\left(\eta_2 + \beta_1 - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

diese Gleichung führen wir für $\sin \eta_1$ links den aus (45) folgenden Wert
n, machen darauf von (46) Gebrauch und finden:

7) $$\sigma = 2\, e^{\beta_2} \cdot \frac{\cos(\eta_1 + \beta_1)}{\cos \eta_1} = 2\, e^{\beta_2} (\cos \beta_1 - \operatorname{tg} \eta_1 \sin \beta_1).$$

enn wir (43b) durch (42b) dividieren, entsteht:

$$\frac{\sigma \cos \eta_1}{2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \eta_1\right)} = \frac{\sin \eta_2 \cdot e^{\beta_2}}{\cos\left(\beta_1 - \frac{\pi}{4} + \eta_2\right)}.$$

ür $\sin \eta_2$ führen wir den aus (45) folgenden Wert ein und machen wieder
on (46) Gebrauch:

8) $$\frac{1}{\sigma} = 2\, e^{\beta_2} \cdot \frac{\cos(\eta_2 + \beta_1)}{\cos \eta_2} = 2\, e^{\beta_2} (\cos \beta_1 - \operatorname{tg} \eta_2 \cdot \sin \beta_1).$$

an kann mit Hilfe von (46) leicht beweisen, daß (47) und (48) identisch sind.

Die Gleichung (45) lehrt unter der Voraussetzung $\beta_2 \gg 1$, daß entweder η_1 oder η_2 oder beide Winkel fast gleich einem ganzen Vielfachen von π sein müssen. Die zwei erstgenannten Fälle führen zu zwei σ-Werten, deren Produkt gleich 1 ist. Dies steht mit der Gleichung (15) im Einklang, da beide σ-Werte zum gleichen Wertesatz λ, γ_1, γ_2 gehören. Wir wollen die entsprechende Rechnung jetzt ausführen. Aus (45) und (46) ergibt sich für:

$$\eta_1 = n_1 \pi + \varepsilon_1, \text{ wo } |\varepsilon_1| \ll 1, \; n_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \tag{49}$$

$$4\,\varepsilon_1 = e^{-2\beta_2} \operatorname{tg}(\beta_1 + \varepsilon_1). \tag{50}$$

Weiter ergeben (45) und (46) für:

$$\eta_2 = n_2 \pi + \varepsilon_2, \text{ wo } |\varepsilon_2| \ll 1, \; n_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \tag{51}$$

$$4\,\varepsilon_2 = e^{-2\beta_2} \operatorname{tg}(\beta_1 + \varepsilon_2). \tag{52}$$

Folglich kann $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ gesetzt werden und wir erhalten:

$$\varepsilon^2 - \varepsilon \operatorname{cotg} \beta_1 \cdot \left(1 - \frac{e^{-2\beta_2}}{4}\right) + \frac{e^{-2\beta_2}}{4} = 0.$$

Da voraussetzungsgemäß $e^{-2\beta_2} \ll 1$, entsteht:

$$\varepsilon = \frac{\operatorname{cotg} \beta_1}{2} \pm \frac{1}{2}\left(\operatorname{cotg}^2 \beta_1 - e^{-2\beta_2}\right)^{1/2}.$$

Diese Gleichungen betrachten wir für zwei Fälle: $\operatorname{cotg}^2 \beta_1 \gg e^{-2\beta_2}$ und $\operatorname{cotg}^2 \beta_1$ von gleicher Größenordnung wie $\exp(-2\beta_2)$. Im ersten Fall gilt das untere Zeichen des Wurzelausdrucks, weil $|\varepsilon| \ll 1$ und somit:

$$\varepsilon \approx \frac{1}{4} \frac{e^{-2\beta_2}}{\operatorname{cotg} \beta_1}.$$

Wir können also in erster Näherung in diesem Fall ε und somit ε_1 sowie ε_2 in Gleichung (47) und (48) im Argument gegen β_1 vernachlässigen. Im zweiten Fall setzen wir: $\beta_1 = (r + \frac{1}{2})\pi - \delta$, wo $r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ und erhalten:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{2} \pm \frac{1}{2}\left(\delta^2 - e^{-2\beta_2}\right)^{1/2}.$$

Offenbar ist ε hier reell oder komplex, je nachdem die Diskriminante positiv oder negativ ist. Ein Sonderfall tritt auf, wenn die Diskriminante verschwindet. Dann ist $\delta = 2\,\varepsilon = \pm \exp(-\beta_2)$ und liegt somit der bereits oben erwähnte Fall vor, daß gleichzeitig gilt:

$$\eta_1 = n_1 \pi + \varepsilon_1 \quad \text{und} \quad \eta_2 = n_2 \pi + \varepsilon_2.$$

In diesem Sonderfall ergeben (47) und (48) $\sigma = \pm 1$. Da β_1 und β_2 stets reell sind, wird σ reell oder komplex, je nachdem ε reell oder komplex ist. In letzterem Fall ist $|\sigma| = 1$ und gelten obige gleichzeitige Gleichungen.

§ 15.

Hilfssätze.

Wir wollen unter der Voraussetzung, daß $\Phi_1(z)$ und $\Phi_2(z)$ *beschränkt* sind, nächst angeben, für welche Werte von λ, γ_1 und γ_2 die Bedingung $\beta_2 \gg 1$ füllt sein kann. Diese Bedingung hält ein, daß $\lambda + \gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2$ in einem il des Bereichs $z_0 \leqq z \leqq z_1$ negativ mit einem Betrag $\gg \zeta^{-2}$ ist. Da Φ_1 d Φ_2 *beschränkt* sind, ist es bei Werten $|\lambda|\zeta^2$ vergleichbar mit 1 notwendig, ß $\zeta^2(|\gamma_1| + |\gamma_2|) \gg 1$. Falls $\gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2$ im genannten Bereich das Vorichen nicht wechselt und $|\gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2|$ über einer endlichen Grenze Φ_0 eibt, kann für $|\lambda|\zeta^2$ vergleichbar mit 1 und $\zeta^2(|\gamma_1| + |\gamma_2|) \gg 1$ keine Nullelle des Ausdrucks $\lambda + \gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2$ auftreten. In diesem Fall kann somit $\gg 1$ nur für $|\lambda|\zeta^2 \gg 1$ bei $\zeta^2(|\gamma_1| + |\gamma_2|) \gg 1$ erfüllt sein.

Wenn dagegen $\gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2$ im genannten z-Bereich das Vorzeichen echselt, können offenbar auch für $|\lambda|\zeta^2$ vergleichbar mit 1 und $(|\gamma_1| + |\gamma_2|)\zeta^2 \gg 1$ Nullstellen im Grundbereich auftreten.

Wie ändern sich β_1 und β_2 bei Änderungen der Parameter λ, γ_1 und γ_2? ur Beantwortung dieser Frage bilden wir die Differentialquotienten von β_1 nd β_2 nach λ, γ_1 und nach γ_2:

$$\frac{\partial\beta_1}{\partial\lambda} = \frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dz}{(\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2)^{1/2}}; \quad \frac{\partial\beta_2}{\partial\lambda} = -\frac{1}{2}\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \frac{dz}{|\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2|^{1/2}}.$$

ie Integranden dieser Ausdrücke sind definitionsgemäß positiv. Somit ändern ch β_1 und β_2 bei wachsendem λ *monoton*. Weiter gilt

$$\frac{\partial\beta_1}{\partial\gamma_1} = \frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\Phi_1\,dz}{(\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2)^{1/2}}; \quad \frac{\partial\beta_2}{\partial\gamma_1} = -\frac{1}{2}\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \frac{\Phi_1\,dz}{|\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2|^{1/2}}.$$

ie entsprechenden Ausdrücke mit Φ_2 im Zähler der Integranden an Stelle on Φ_1 ergeben sich für $\partial\beta_1/\partial\gamma_2$ und $\partial\beta_2/\partial\gamma_2$. Wir setzen $\gamma_1 = \mu_1\gamma$ und $= \mu_2\gamma$. Somit wird:

$$\frac{\partial\beta_1}{\partial\gamma} = \frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_1\Phi_1+\mu_2\Phi_2}{(\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2)^{1/2}}\,dz; \quad \frac{\partial\beta_2}{\partial\gamma} = \frac{1}{2}\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} -\frac{\mu_1\Phi_1+\mu_2\Phi_2}{|\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2|^{1/2}}\,dz.$$

iese Integranden ändern bei wachsendem γ fast im ganzen Integrationsereich ihr Vorzeichen nicht, falls $|\gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2| \gg \lambda$. Somit sind β_1 und β_2 onotone Funktionen von γ, und zwar ändern sie sich bei wachsendem γ positivem Sinne, wenn der betreffende Integrand positiv ist und in negativem inne, wenn der Integrand negativ ist.

Wie müssen $\Phi_1(z)$ und $\Phi_2(z)$ beschaffen sein, damit für die obengenannte Werte von γ_1, γ_2 und λ stets zwei und nur zwei Nullstellen im Grundbereic vorhanden sind? Hierfür gilt die Bedingung, daß die Funktion $\gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi$ bei wachsendem z *monoton* von einem kleinsten zu einem größten Wert steige und dann wieder auf den kleinsten Wert monoton herabsinken muß. Dies Bedingung ist z. B. erfüllt, falls Φ_1 und Φ_2 die gleiche Grundperiode aufweise und je für sich bei wachsendem z monoton von einem kleinsten bis zu einer höchsten Wert steigen und dann wieder auf den kleinsten Wert monoto herabsinken, während die Kleinst- und Höchstwerte zum gleichen z gehöre

§ 16.

Asymptotische Lage der Eigenwertflächen.

Aus den Betrachtungen in § 14 kann geschlossen werden, daß die Gle chungen (47) und (48) in der Form:

(47 a) $$\sigma_1 = 2\, e^{\beta_2} \cos(\beta_1 + \varepsilon)$$

bzw.

(48 a) $$\frac{1}{\sigma_2} = 2\, e^{\beta_2} \cos(\beta_1 + \varepsilon)$$

geschrieben werden können, je nachdem η_1 bzw. η_2 nahezu gleich einem ganze Vielfachen von π ist. Für $|\delta| \leqq \exp(-\beta_2)$ kann hieraus abgeleitet werde

(53) $$f = \sigma_1 + \frac{1}{\sigma_1} = \sigma_1 + \sigma_2 = (-1)^r\, 2\, \delta\, e^{\beta_2},$$

wo f die gleiche Bedeutung hat wie in § 10.

Da β_1 und β_2 von gleicher Größenordnung sind, wird die Änderung von bei Änderung von λ bzw. γ wegen $\delta = (r + \frac{1}{2})\pi - \beta_1$ überwiegend durch de Exponentialfaktor bestimmt. Somit ist f nach § 15 im betrachteten Bereic der Gleichung (53) eine monotone Funktion von λ und von γ, da β_2 eine mono tone Funktion dieser Größen ist. Weiter wechselt f bei gleichem δ das Vo zeichen, wenn r sich um 1 ändert. Hieraus geht hervor, daß f asymptotisch en lang jeder Geraden parallel zur λ-Achse sowie entlang jeder Geraden, welche d λ-Achse senkrecht schneidet, im wesentlichen in gleicher Weise verläuft wie i § 10 nach H. A. Kramers und O. Haupt entlang Parallelen zur λ-Achse al gemein gezeigt: Auf zwei halbperiodische Eigenwerte folgen stets zwei gan periodische, zwischen ungleichnamigen periodischen Eigenwerten ist komplex und $|\sigma| = 1$, zwischen gleichnamigen periodischen Eigenwerte ist σ reell und $|\sigma| \gtrless 1$. Allgemein gilt dieser Verlauf asymptotisch entlan *jeder* Geraden durch die λ-Achse des γ_1-, γ_2-, λ-Raumes. Dies folgt aus d asymptotischen Krümmung der Eigenwertflächen, die wir in § 17 behandel

Wenn wir die benachbarten δ-Werte, für welche f nach (53) gleich ± 2 wird, mit δ_1 und δ_2 bezeichnen, so ist:

$$|\delta_1 - \delta_2| = 2\, e^{-\beta_2}, \tag{54}$$

und da β_2 von der Größenordnung $\zeta(\sqrt{|\lambda|} + \sqrt{|\gamma_1|} + \sqrt{|\gamma_2|})$ ist, liegen diese beiden δ-Werte nahe zusammen. Wir lassen nun γ_1 und γ_2 konstant und bezeichnen die λ-Werte, welche zu δ_1 und δ_2 gehören, bzw. mit λ_1 und λ_2. Dann wird, da β_1 von gleicher Größenordnung wie β_2 ist, die Größe $|\lambda_1 - \lambda_2| = \Delta\lambda$ höchstens von der Größenordnung:

$$\zeta(\sqrt{|\lambda|} + \sqrt{|\gamma_1|} + \sqrt{|\gamma_2|})\, \exp\{-\zeta(\sqrt{|\lambda|} + \sqrt{|\gamma_1|} + \sqrt{|\gamma_2|})\}.$$

somit liegen auch die beiden genannten λ-Werte sehr nahe zusammen. In analoger Weise kann man schließen, daß bei konstantem λ und veränderlichem γ die Größe $\Delta\gamma$, welche in diesen Fällen der obigen Größe $\Delta\lambda$ entspricht, von gleicher Größenordnung wird wie oben $\Delta\lambda$. Je *zwei ungleichnamige periodische Eigenwertflächen liegen asymptotisch somit nahe zusammen.* Das gleiche gilt offenbar von allen zwischenliegenden Eigenwertflächen zu komplexen σ-Werten. Beispiele für diese asymptotische Lage liefern die Mathieusche Gleichung (Ergebn. d. Math. **1**, H. 3, S. 24) sowie verwandte Gleichungen (ebenda, S. 40).

Wenn wir im Ausdruck $\lambda + \gamma_1 \Phi_1(z) + \gamma_2 \Phi_2(z)$ die Parameter γ_1 und γ_2 konstant halten und λ *abnehmen* lassen, wird β_2 größer und rücken demnach die obengenannten Eigenwertflächen *näher* zusammen.

Die obige asymptotische Lage der Eigenwerte wurde bereits früher[13]) angegeben. Die dortige Rechnung berücksichtigte die Stokessche Erscheinung nicht und führte deshalb zu Formeln, welche von den obigen abweichen.

Wir wollen den Verlauf von f entlang Geraden im λ-, γ_1-, γ_2-Raum noch etwas genauer verfolgen. Wie in § 10 führen wir die beiden Winkel φ_1 und φ_2 ein, welche eine solche Gerade durch den Punkt Γ_0, Γ_1, Γ_2 des Parameterraumes festlegen. Wir unterscheiden Geraden 1. Art, welche Winkel φ_1 und φ_2 bilden, derart, daß für alle z gilt: $1 + \Phi_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_1 + \Phi_2 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2 \geqq 0$ und Geraden 2. Art, für welche in gewissen z-Bereichen gilt: $1 + \Phi_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_1 + \Phi_2 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2 < 0$. Entlang Geraden der 1. Art haben wir bereits in § 10 allgemein den Verlauf von f bestimmt. Es handelt sich hier somit darum, diesem Verlauf entlang Geraden der 2. Art nachzugehen. In Gleichung (26) tritt im letzten Summanden w mit $\lambda(1 + \Phi_1 \operatorname{tg}\varphi_1 + \Phi_2 \operatorname{tg}\varphi_2)$ multipliziert. Dieser Faktor nimmt, wenn $|\lambda|$ über alle Grenzen wächst, entlang den genannten Geraden 2. Art voraussetzungsgemäß positive und negative Werte an, welche ebenfalls über alle Grenzen wachsen. Im Falle zweier Null-

[13]) M. J. O. Strutt, Math. Ann. **101** (1929), S. 559—569.

stellen im Bereich $z_0 \leqq z \leqq z_1$ können wir aus den obigen asymptotische Formeln schließen, daß f entlang solchen Geraden positive und negative Wert annimmt, welche ebenfalls über alle Grenzen wachsen, und zwar sowohl fü $\lambda \to -\infty$ als für $\lambda \to +\infty$.

Diese Überlegungen führen zum Schluß: *Entlang Geraden der 1. Ar gibt es zu jedem reellen σ, dessen Modul größer oder kleiner als* 1 *ist, nur ein endliche Anzahl von Eigenwerten. Auf Geraden der 2. Art gibt es zu jedem reellen mit $|\sigma| \gtrless 1$ eine abzählbar unendliche Anzahl von Eigenwerten mit positive λ-Werten und eine ebensolche Zahl mit negativen λ-Werten.* Wenn als Ausnahme fall φ_1 oder φ_2 (oder beide Winkel gleichzeitig) gleich einem ungeraden Viel fachen von $\pi/2$ ist, ändert sich letzter Satz für Geraden 2. Art wie folgt *Wenn wir $\gamma_1 = \mu_1 \gamma$ und $\gamma_2 = \mu_2 \gamma$ setzen, gibt es im Falle φ_1 oder φ_2 (ode beide Winkel zugleich) gleich einem ungeraden Vielfachen von $\pi/2$ eine abzählba unendliche Anzahl positiver und eine ebensolche Zahl negativer γ-Eigenwert zu jedem reellen σ-Wert, dessen Modul größer oder kleiner als* 1 *ist.* Zu jeden reellen oder komplexen σ-Wert mit $|\sigma| = 1$ gibt es entlang Geraden der 1. sowi der 2. Art eine abzählbar unendliche Zahl von Eigenwerten. Entlang Gerade der 1. Art gehören hierzu, bis auf eine endliche Zahl negativer Werte, nu positive λ-Werte. Entlang Geraden der 2. Art gehören hierzu abzählba unendlich viele negative sowie eine ebensolche Zahl positiver Eigenwerte λ Im obengenannten Ausnahmefall gibt es entlang Geraden 2. Art eine abzählba unendliche Zahl negativer sowie eine ebensolche Zahl positiver Eigenwerte γ wo $\gamma_1 = \mu_1 \gamma$ und $\gamma_2 = \mu_2 \gamma$ ist, zu allen σ-Werten mit $|\sigma| = 1$.

Wir können die Lage der obengenannten Eigenwerte asymptotisch d. h. für $|\lambda| \to \infty$ (bzw. im Ausnahmefall $|\gamma| \to \infty$) an Hand obiger Formeln noch genauer verfolgen. Aus Gleichung (47a) und (48a) folgt:

$$\beta_1 + \varepsilon = \arccos\left(\frac{\sigma_1}{2} e^{-\beta_2}\right), \quad \text{bzw.} \quad = \arccos\left(\frac{e^{-\beta_2}}{2\sigma_2}\right).$$

Asymptotisch für $\beta_2 \to \infty$ wird somit:

$$\beta_1 + \varepsilon = (r + \tfrac{1}{2})\pi + q, \quad \text{wo } r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

und:

$$\lim_{\beta_2 \to \infty} |q| \to 0.$$

Wegen der asymptotischen Bedeutung von β_1 für $(|\lambda| + |\gamma_1| + |\gamma_2|)\,\zeta^2 \to \infty$

$$\lim \beta_1 \to |\lambda|^{1/2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (1 + \Phi_1 \operatorname{tg} \varphi_1 + \Phi_2 \operatorname{tg} \varphi_2)^{1/2}\, dz$$

im Falle $\varphi_1 \neq (n_1 + \tfrac{1}{2})\pi$ und $\varphi_2 \neq (n_2 + \tfrac{1}{2})\pi$, wo $n_1, n_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ und:

$$\lim \beta_1 \to |\gamma|^{1/2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (\Phi_1 \cdot \mu_1 + \Phi_2 \cdot \mu_2)^{1/2}\, dz$$

n Falle $\varphi_1 = (n_1 + \frac{1}{2})\pi$ oder $\varphi_2 = (n_2 + \frac{1}{2})\pi$ (oder beides zugleich) ergibt ich unter Berücksichtigung der Beziehung $\lim \varepsilon \to 0$ für die zwei genannten 'älle bei $|\sigma| = 1$ und $|\sigma| \approx 1$:

$$|\lambda| \approx \frac{(r + {}^1/_2)^2 \pi^2}{\zeta^2 I_1^2}, \quad \text{bzw.:} \quad |\gamma| \approx \frac{(r + {}^1/_2)^2 \pi^2}{\zeta^2 I_2^2},$$

vo:

$$I_1 \zeta = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (1 + \Phi_1 \operatorname{tg} \varphi_1 + \Phi_2 \operatorname{tg} \varphi_2)^{1/2}\, dz; \quad I_2 \zeta = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \mu_1 \Phi_1 + \mu_2 \Phi_2)^{1/2}\, dz.$$

Für reelle σ-Werte und $|\sigma| \gtrless 1$ erhält man:

$$|\lambda| \approx \frac{(2r\pi \pm a)^2}{\zeta^2 I_1^2}, \quad \text{bzw.} \quad |\gamma| \approx \frac{(2r\pi \pm a)^2}{\zeta^2 I_2^2},$$

vo:

$$a = \arccos\left(\frac{\sigma}{2} e^{-\beta_2}\right), \quad \text{oder} = \arccos\left(\frac{e^{-\beta_2}}{2\sigma}\right).$$

Vom Arcus ist z. B. der Hauptwert zu wählen.

Endlich bemerken wir, daß für negative reelle σ-Werte, deren Modul einen bestimmten Wert übersteigt, der Punkt A_0, Γ_1, Γ_2, durch den die betrachtete Gerade hindurchgeht, so gewählt werden kann, daß entlang Geraden 1. Art bei geeignet gewählten Winkeln φ_1 und φ_2 *kein einziger* reeller Eigenwert auftritt, wie aus den in § 2 angegebenen Eigenwertschranken folgt (Fig. 1d).

§ 17.

Asymptotischer Verlauf der Eigenwertflächen.

Wir wollen asymptotisch entlang den Eigenwertkurven die Differentialquotienten $\partial\lambda/\partial\gamma_1$ und $\partial\lambda/\partial\gamma_2$ berechnen. Hierzu gehen wir von einer der Gleichungen (47a) oder (48a) aus:

$$\sigma = 2\, e^{\beta_2} \cos(\beta_1 + \varepsilon)$$

und betrachten zunächst den Fall, daß $\sigma = \pm 1$, also

$$\beta_1 = (r + \tfrac{1}{2})\pi \pm e^{-\beta_2}; \quad r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\lambda}{\partial\gamma_1} &\approx -\frac{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\Phi_1\, dz}{(\lambda + \gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2)^{1/2}}}{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dz}{(\lambda + \gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2)^{1/2}}} \pm e^{-\beta_2} \cdot \frac{\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \frac{\Phi_1\, dz}{|\lambda + \gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2|^{1/2}}}{\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \frac{dz}{|\lambda + \gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2|^{1/2}}}; \\ \frac{\partial\lambda}{\partial\gamma_2} &\approx -\frac{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\Phi_2\, dz}{(\lambda + \gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2)^{1/2}}}{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dz}{(\lambda + \gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2)^{1/2}}} \pm e^{-\beta_2} \cdot \frac{\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \frac{\Phi_2\, dz}{|\lambda + \gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2|^{1/2}}}{\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \frac{dz}{|\lambda + \gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2|^{1/2}}}. \end{aligned}\right. \quad (55)$$

Das 2. Glied rechts kann jeweils unter der Voraussetzung $\beta_2 \gg 1$ gegen das 1. vernachlässigt werden.

Im Falle negativer λ-Werte ist $\gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2$ im Bereich $\alpha_1 < z < \alpha_2$ überall positiv und wird nach (55):

$$\gamma_1 \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_1} + \gamma_2 \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_2} < 0.$$

Dieser Schluß gilt auch für λ positiv und $\lambda \ll |\gamma_1 + \gamma_2| \gg \zeta^{-2}$. Asymptotisch gilt somit dieser in § 12 für die Flächen zu den *kleinsten* λ-Eigenwerten hergeleitete Verlauf allgemein für *alle* periodischen Eigenwertflächen.

Für komplexe σ gilt:

$$\beta_1 = (r + \tfrac{1}{2})\pi \pm \mu e^{-\beta_2},$$

wo μ eine positive Größe < 1 darstellt. Die Gleichung (55), in der das 2. Glied fortgelassen werden kann, gilt somit asymptotisch auch für diese Eigenwertflächen und die obige Schlußfolgerung $\gamma_1 \cdot \partial\lambda/\partial\gamma_1 + \gamma_2 \cdot \partial\lambda/\partial\gamma_2 < 0$ ebenfalls im gleichen Umfang.

Für reelle Werte von σ, für die, falls $|\sigma| > 1$ ist, gilt: $|\sigma| \ll \exp(\beta_2)$ und falls $|\sigma| < 1$ gilt: $|\sigma| \gg \exp(-\beta_2)$, für welche also $|\sigma|$ von der Größenordnung 1 ist, können die Eigenwertflächen wieder aus der letzten Gleichung berechnet werden, wenn $\mu > 1$ angenommen wird, wie aus Gleichung (47a) und (48a) hervorgeht. Für diese Eigenwertflächen gilt offenbar die obige Folgerung $\gamma_1 \cdot \partial\lambda/\partial\gamma_1 + \gamma_2 \cdot \partial\lambda/\partial\gamma_2 < 0$ auch im gleichen Umfang.

Wenn für alle λ- und γ-Werte, welche in § 15 behandelt wurden, die Funktion $\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2$ stets 2 und nur 2 Nullstellen hat, können aus Gleichung (55) noch weitere Schlüsse gezogen werden.

Wir setzen $\gamma_1 = \mu_1 \gamma$, $\gamma_2 = \mu_2 \gamma$ und γ positiv. Die Funktion $\mu_1 \Phi_1 + \mu_2 \Phi_2$ von z soll bei wachsendem z monoton von einem kleinsten (negativen) bis zu einem größten (positiven) Wert ansteigen und wieder auf den kleinsten Wert herabsinken. Der größte Wert sei $\Phi_{\max}$. Dann wird für $\lambda \to -\infty$ und γ positiv nach Gleichung (55): $\partial\lambda/\partial\gamma \to -\Phi_{\max}$. Bei monotoner Abnahme von λ nimmt $|\partial\gamma/\partial\lambda|$ ebenfalls monoton ab. Wir können schließen, daß asymptotisch $\partial^2\lambda/\partial\gamma^2$ für die Eigenwertflächen *negativ* ist und haben somit den Sinn der asymptotischen *Krümmung* dieser Flächen bestimmt, sofern σ komplex oder exakt oder nahezu gleich $+1$ oder -1 ist. Für $\lambda \to -\infty$ wird $|\partial^2\lambda/\partial\gamma^2| \to 0$.

Die periodischen Eigenwertflächen nähern sich für $\lambda \to -\infty$ den Eigenwertflächen, für welche $\delta = 0$ und somit $\beta = (r + \frac{1}{2})\pi$ ist. Für diese Flächen gilt $\sigma = \pm i$ und die entsprechenden Eigenfunktionen haben demnach di

eriode 4ζ. Wir können schließen, daß sich die halb- und die ganzperiodischen igenfunktionen asymptotisch für $\lambda \to -\infty$ diesen Eigenfunktionen mit er Periode 4ζ nähern. Die entsprechende Tatsache wurde von E. L. INCE[14]) ei der MATHIEUschen Gleichung angegeben.

Durch die oben angegebene asymptotische Krümmung der Eigenwertächen kann eine Berührungsgerade einer Fläche, welche die λ-Achse schneidet, ieselbe Fläche asymptotisch in keinem weiteren Punkt treffen. Hieraus olgt die allgemeine Gültigkeit der in § 16 angegebenen Lagenordnung für *ede* Gerade dieser Art im betrachteten asymptotischen Bereich.

§ 18.

Eigenwertformeln für $2n$ Nullstellen.

Wir setzen jetzt voraus, die Funktion $\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2$ habe im Bereich $_0 \leqq z \leqq z_1$ insgesamt $2n$ Nullstellen: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n}$; und es sei $\alpha_{2n+1} = \alpha_1 + \zeta$. Veiter soll sie im Bereich $\alpha_1 \leqq z \leqq \alpha_2$ positiv sein, im Bereich $\alpha_2 \leqq z \leqq \alpha_3$ egativ, im Bereich $\alpha_3 \leqq z \leqq \alpha_4$ positiv usw. In diesen Bereichen gelten dann symptotisch die Lösungen (39), (40), (41) usw. und sie enthalten insgesamt n Konstanten: $A_1, A_2 \ldots A_{2n}, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{2n}$. Zur Berechnung dieser n Größen sowie des Parameters λ, wenn γ_1 und γ_2 sowie σ gegeben sind, iefern uns die Stetigkeits- und Randbedingungen insgesamt $4n$ Gleichungen, während die noch fehlende letzte Gleichung sich aus der Normierung der betreffenden Eigenfunktion ergibt.

Wir schreiben die zuerstgenannten $4n$ Gleichungen an und benutzen die Abkürzungen:

$$\beta_{kl} = \int_{\alpha_k}^{\alpha_l} |\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2|^{1/2}\, dz, \qquad \begin{matrix} k = 1, 2, \ldots 2n, \\ l = 2, 3, \ldots 2n+1. \end{matrix}$$

Analog zu den Gleichungen (42a) und (42b) erhalten wir:

$$\left\{\begin{aligned} &\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \eta_1\right) = \operatorname{cotg}\left(\beta_{12} - \frac{\pi}{4} + \eta_2\right); \\ &\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \eta_3\right) = \operatorname{cotg}\left(\beta_{34} - \frac{\pi}{4} + \eta_4\right); \\ &A_1 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \eta_1\right) = A_2 \cos\left(\beta_{12} - \frac{\pi}{4} + \eta_2\right); \\ &A_3 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \eta_3\right) = A_4 \cos\left(\beta_{34} - \frac{\pi}{4} + \eta_4\right), \text{ usw.} \end{aligned}\right.$$

56)

[14]) E. L. INCE, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 46 (1925/26), S. 20–29, 316–322; 47 (1927), S. 294–301.

und analog zu (43a) und (43b):

$$(57)\qquad \begin{cases} A_2 \sin\eta_2 \cdot e^{\beta_{23}} = \dfrac{A_3}{2}\cos\eta_3; \\ A_4 \sin\eta_4 \cdot e^{\beta_{45}} = \dfrac{A_5}{2}\cos\eta_5; \\ \dfrac{A_2}{2}\cos\eta_2 \cdot e^{-\beta_{23}} = A_3 \sin\eta_3; \\ \dfrac{A_4}{2}\cos\eta_4 \cdot e^{-\beta_{45}} = A_5 \sin\eta_5, \text{ usw.} \end{cases}$$

Die letzten dieser Gleichungen lauten:

$$(57a)\qquad \begin{cases} A_{2n} \sin\eta_{2n} \cdot e^{\beta_{2n,\,2n+1}} = \sigma \dfrac{A_1}{2}\cos\eta_1; \\ \dfrac{A_{2n}}{2}\cos\eta_{2n} \cdot e^{-\beta_{2n,\,2n+1}} = \sigma A_1 \sin\eta_1. \end{cases}$$

Aus (57) ergibt sich:

$$(58)\qquad 4\,\mathrm{tg}\,\eta_3 = e^{-2\beta_{23}}\,\mathrm{cotg}\,\eta_2;\quad 4\,\mathrm{tg}\,\eta_5 = e^{-2\beta_{45}}\,\mathrm{cotg}\,\eta_4, \text{ usw.},$$

und schließlich aus (57a):

$$(58a)\qquad 4\,\mathrm{tg}\,\eta_1 = e^{-2\beta_{2n,\,2n+1}} \cdot \mathrm{cotg}\,\eta_{2n},$$

während aus (56) hervorgeht:

$$(59)\qquad (n_1 + \tfrac{1}{2})\pi - \eta_1 = \beta_{12} + \eta_2;\ (n_3 + \tfrac{1}{2})\pi - \eta_3 = \beta_{34} + \eta_4, \text{ usw.},$$

wo:

$$n_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; n_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \text{ usw.}$$

Wir dividieren die erste Gleichung (57a) durch die dritte Gleichung (56) und erhalten:

$$\frac{\sigma\cos\eta_1}{2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \eta_1\right)} = \frac{A_{2n}\sin\eta_{2n}\cdot e^{\beta_{2n,\,2n+1}}}{A_2\cos\left(\beta_{12} - \frac{\pi}{4} + \eta_2\right)}.$$

Mit Hilfe der 1. Gleichung (57) drücken wir A_2 durch A_3 aus, darauf mit Hilfe der 4. Gleichung (56) A_3 durch A_4 usw. Unter Berücksichtigung von (59) entsteht:

$$(60)\qquad \sigma = 2^n \cdot e^{\beta_{23}+\beta_{45}+\cdots\beta_{2n,\,2n+1}} \cdot \frac{\cos(\eta_1+\beta_{12})}{\cos\eta_1}\cdot\frac{\cos(\eta_3+\beta_{34})}{\cos\eta_3}\cdots\frac{\cos(\eta_{2n-1}+\beta_{2n-1,2n})}{\cos\eta_{2n-1}}.$$

In analoger Weise ergibt sich:

$$(61)\qquad \frac{1}{\sigma} = 2^n \cdot e^{\beta_{23}+\beta_{45}+\cdots\beta_{2n,\,2n+1}} \cdot \frac{\cos(\eta_2+\beta_{12})}{\cos\eta_2}\cdot\frac{\cos(\eta_4+\beta_{34})}{\cos\eta_4}\cdots\frac{\cos(\eta_{2n}+\beta_{2n-1,2n})}{\cos\eta_{2n}}.$$

Man kann leicht zeigen, daß (61) und (60), welche den Gleichungen (48) und (47) entsprechen, identisch sind.

Aus (58) und (58a) kann geschlossen werden, daß entweder η_2 oder η_3 oder beide, entweder η_4 oder η_5 oder beide, ... entweder η_{2n} oder η_1 oder beide nahezu gleich einem ganzen Vielfachen von π sein müssen, falls wir voraussetzen:

$$\beta_{23} \gg 1; \quad \beta_{45} \gg 1; \quad \ldots \quad \beta_{2n,\,2n+1} \gg 1.$$

Unter dieser Voraussetzung lassen sich aus den Eigenwertformeln (60) und (61) für $2n$ Nullstellen analoge Folgerungen über die Eigenwertflächen ziehen, wie aus (47) und (48) für zwei Nullstellen.

§ 19.

Asymptotische Eigenwertflächen für $2n$ Nullstellen.

Wir wollen zeigen, daß sich für $|\sigma| \approx 1$ unter obengenannter Voraussetzung ergibt: $\beta_{12} = (r_1 + \frac{1}{2})\pi - \delta_1$, oder $\beta_{34} = (r_3 + \frac{1}{2})\pi - \delta_3, \ldots$ $\beta_{2n-1,\,2n} = (r_{2n-1} + \frac{1}{2})\pi - \delta_{2n-1}$, wo alle r positive oder negative ganze Zahlen darstellen, während alle $|\delta| \ll 1$ sind. Es können auch mehrere n-Werte gleichzeitig obigen Bedingungen genügen. Den Beweis führen wir für $n = 2$ aus. Für höhere n-Werte verläuft er ebenso.

Wir nehmen zunächst an, daß nicht gleichzeitig η_1 und η_4 sowie η_2 und η_3 nahezu gleich einem ganzen Vielfachen von π sind, sondern nur jeweils eine dieser Größen. Dann gibt es folgende Fälle: 1. η_1 und η_2, 2. η_1 und η_3, 3. η_2 und η_4, 4. η_3 und η_4 nahezu gleich einem ganzen Vielfachen von π. Im 1. Fall geht aus (59) hervor: $\beta_{12} = (r_1 + \frac{1}{2})\pi - \delta_1$. Im 2. Fall ergibt sich aus (60):

$$\sigma = 2^2 \cdot e^{\beta_{23} + \beta_{45}} (\cos \beta_{12} - \operatorname{tg} \eta_1 \cdot \sin \beta_{12})(\cos \beta_{34} - \operatorname{tg} \eta_3 \cdot \sin \beta_{34}),$$

oder:

$$\sigma \approx 2^2 \cdot e^{\beta_{23} + \beta_{45}} \cos \beta_{12} \cdot \cos \beta_{34}$$

und für $|\sigma| \approx 1$ müssen wegen $\beta_{23} \gg 1$ und $\beta_{45} \gg 1$ entweder β_{12} oder β_{34} oder beide nahezu gleich einem ungeraden Vielfachen von $\pi/2$ sein. Im 3. Fall können wir diese Schlußweise im Anschluß an (61) mit gleichem Ergebnis wiederholen. Im 4. Fall ergibt sich aus (59) unmittelbar: $\beta_{34} = (r_3 + \frac{1}{2})\pi - \delta_3$. Wenn η_1 und η_4 oder η_2 und η_3 gleichzeitig nahezu gleich einem ganzen Vielfachen von π sind, läßt sich die obige Schlußweise im wesentlichen ebenso durchführen.

Es ist also stets für $|\sigma| \approx 1$ eine der Größen $\beta_{12}, \beta_{34}, \ldots \beta_{2n-1,\,2n}$ nahezu gleich einem ungeraden Vielfachen von $\pi/2$. Die in § 15 angeführten Überlegungen lehren im vorliegenden Fall, daß sich diese Größen bei monotoner

Änderung von λ oder von γ ebenfalls monoton ändern. Eine Wiederholung der Schlußweise von § 16 ergibt sodann unmittelbar, daß auch im vorliegenden Fall asymptotisch je zwei ungleichnamige periodische Eigenwertflächen nahe zusammenliegen, falls nur *eine* der Größen $\beta_{12}, \beta_{34} \ldots$ gleich $(r + \frac{1}{2})\pi - \delta$ ist. Falls mehrere dieser Größen diese Eigenschaft aufweisen, können wir vom Hilfssatz Gebrauch machen, daß sie sich alle bei Änderung von λ oder γ in *gleichem* Sinne ändern. Hieraus folgt auch in diesem Falle die Gültigkeit des obigen asymptotischen Lagensatzes. Wenn λ abnimmt, rücken je zwei ungleichnamige benachbarte Eigenwertflächen näher zusammen.

Auch im vorliegenden Fall kann man das Analogon der Gleichung (55) aus dem angegebenen Wert einer der Größen $\beta_{12}, \beta_{34}, \ldots$ herleiten, wobei die Integrationsgrenzen, welche zum betreffenden β-Wert gehören, eingesetzt werden müssen. Für alle Eigenwertflächen, für welche $|\sigma| \approx 1$ gilt somit asymptotisch: $\gamma \cdot \partial\lambda/\partial\gamma < 0$ unter den gleichen Voraussetzungen wie bei zwei Nullstellen.

Wenn die Nullstellenzahl sich beim Ändern von λ, γ_1 und γ_2 im Sinne von § 15 nicht ändert, kann in analoger Weise wie in § 16 geschlossen werden, daß $\partial^2\lambda/\partial\gamma^2$ für die Eigenwertflächen mit $|\sigma| \approx 1$ asymptotisch negativ ist und für $\lambda \to -\infty$ wird: $|\partial^2\lambda/\partial\gamma^2| \to 0$.

Unter den genannten Voraussetzungen erhält man demnach bei $2n$ Nullstellen im wesentlichen den gleichen asymptotischen Flächenverlauf wie bei zwei Nullstellen.

Es kann der Fall eintreten, daß zwei einfache Nullstellen der Funktion $\lambda + \gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2$ zu einer doppelten Nullstelle zusammenfallen. In solchen Fällen und auch bei mehrfachen Nullstellen höherer Ordnung ergeben sich gegenüber den mitgeteilten keine wesentlich neuen Gesichtspunkte. Man kann sie dadurch behandeln, daß einige der obigen β-Werte gleich Null gesetzt werden.

IV. Erweiterung auf $m + 1$ Parameter.

§ 20.

Schranken für die Eigenwerte bei $m + 1$ Parametern.

An Stelle der Gleichung (1) betrachten wir jetzt die Gleichung:

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \lambda w + \{\gamma_1\Phi_1(z) + \gamma_2\Phi_2(z) + \cdots + \gamma_m\Phi_m(z)\}w = 0, \tag{62}$$

wo $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_m$ reellwertige periodische Funktionen mit der gemeinsamen Grundperiode ζ darstellen, welche den Bedingungen für die Entwicklung in absolut und gleichmäßig konvergente Fourier-Reihen genügen. Die $m + 1$ Parameter $\lambda, \gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_m$ sind reell, ebenso wie die unabhängige Veränder-

che z. Wir suchen Lösungen dieser Gleichung (62), welche der Bedingung $(z+\zeta) = \sigma\, w(z)$ für alle z, oder anders geschrieben:

$$\begin{cases} w(z_0+\zeta) = \sigma\, w(z_0); \\ w'(z_0+\zeta) = \sigma\, w'(z_0), \end{cases} \tag{63}$$

o Akzente Differentiation nach z bezeichnen, genügen. Bei gegebenen Verten von σ sowie von m der genannten $m+1$ Parameter suchen wir den $m+1$)-ten Parameter so zu bestimmen, daß (63) und (62) erfüllt werden erallgemeinerte Hillsche Aufgabe). Offenbar handelt es sich um eine Erweiterung der eingangs im Anschluß an Gleichung (1) und (2) gestellten Aufabe, und wir werden versuchen, die bei letztgenannter Aufgabe erhaltenen rgebnisse auf die vorliegende anzuwenden.

Hierzu betrachten wir die $m+1$ Parameter als rechtwinklige Koordinaten n einem $(m+1)$-dimensionalen euklidischen Raume. Die Gleichung (5) ann unmittelbar auf den vorliegenden Fall ausgedehnt werden und ergibt

$$(\gamma_1^2+\gamma_2^2+\cdots+\gamma_m^2)^{-1} \leqq \int_{z_0}^{z_1}\int_{z_0}^{z_1} (\Phi_1^2+\Phi_2^2+\cdots+\Phi_m^2)\,|G(z,\zeta)|^2\,dz\,d\zeta, \tag{64}$$

o G die durch (4), (4a) oder (4b) dargestellte Funktion ist. Wenn ψ^2 den öchstwert des ersten Faktors im Integranden bezeichnet, entsteht die Formel:

$$(\gamma_1^2+\gamma_2^2+\cdots+\gamma_m^2)^{-1} \leqq \psi^2 \int_{z_0}^{z_1}\int_{z_0}^{z_1} |G(z,\zeta)|^2 dz\,d\zeta. \tag{64a}$$

Vir können demnach von jedem Punkt der λ-Achse aus eine m-dimensionale ugeloberfläche im $(\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_m)$-Raum bestimmen, innerhalb derer für iesen λ-Wert keine γ-Eigenwerte liegen.

Als Anwendung betrachten wir die Hillsche Gleichung:

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \lambda\, w + w\left(\gamma_1 \cos\frac{2\pi z}{\zeta} + \frac{\gamma_2}{2}\cos 2\frac{2\pi z}{\zeta} + \cdots\right) = 0.$$

er Klammerausdruck stellt bei gleichmäßig beschränkten Größen γ_1, γ_2, $_3, \ldots$ die Fourier-Reihe einer der Dirichletschen Bedingung genügenden eraden Funktion von z dar. Hierbei wird ψ^2 nach (64a) gegeben durch:

$$\psi^2 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

nd die Schranken für die Parameter gehen unmittelbar aus (64a) hervor. ie Reihe in den Klammern links konvergiert z. B., falls die periodische unktion der Hillschen Gleichung eine stetige Ableitung 1. Ordnung und ine stückweise stetige Ableitung 2. Ordnung hat.

Die in § 3 angegebenen Maximum-Minimum-Eigenschaften der Eigenerte können ebenfalls unmittelbar auf den vorliegenden Fall übertragen erden. Als Beispiel sei γ, wo $\gamma_1 = \mu_1\gamma$, $\gamma_2 = \mu_2\gamma \ldots \gamma_m = \mu_m\gamma$, zu be-

stimmen, während die $m + 1$-Größen $\lambda, \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_m$ vorgegeben sind. Wi betrachten den Ausdruck (9) sowie:

$$N = \int_{z_0}^{z_1} (\mu_1 \Phi_1 + \mu_2 \Phi_2 + \cdots + \mu_m \Phi_m)\, w(z)\, w^*(z)\, dz \tag{65}$$

und die Nebenbedingungen:

$$\int_{z_0}^{z_1} (\mu_1 \Phi_1 + \mu_2 \Phi_2 + \cdots + \mu_m \Phi_m)\, w(z)\, F_k(z)\, dz = 0, \tag{66}$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots n - 1$$

Für positive definite Werte M nach (9) ist der n-te positive Eigenwert γ de höchste Wert, den das Minimum von M annehmen kann, wenn wir die stetige zweimal differenzierbaren adjungierten Funktionen w und w^*, welche de Randbedingungen (63) bzw. den hierzu adjungierten Randbedingungen sowi der Gleichung $N = 1$ [nach (65)] und den Nebenbedingungen (66) genügen variieren und die stetigen Funktionen F_k verändern, bis das Maximum Minimum von M erreicht wird.

Aus diesen und analogen Maximum-Minimum-Eigenschaften können auch im vorliegenden Fall mit $m + 1$ Parametern Schranken für dieselben her geleitet werden. So z. B. *obere* Schranken für den jeweiligen Eigenwert mi dem kleinsten Betrag, welche zusammen mit den unteren Schranken nach (64 und (64a) diese Eigenwerte einschließen. Andererseits können wir die Eigen werte der vorliegenden Aufgabe infolge ihrer Maximum-Minimum-Eigen schaften auch mit Eigenwerten anderer, einfach lösbarer Aufgaben ver gleichen.

Als Beispiel hierzu wollen wir die Betrachtungen von § 4 auf den vor liegenden Fall erweitern. Wir gehen von der oben gegebenen Formulierung der Eigenwertaufgabe aus und suchen für gegebene Werte von $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_m$ sowie von λ für $\sigma = \pm 1$ Schranken für den n-ten Eigenwert γ. Es sei $g_{\max}$ de größte (positiv vorausgesetzte) und $g_{\min}$ der kleinste (negativ vorausgesetzte Wert von $g = (\mu_1 \Phi_1 + \mu_2 \Phi_2 + \cdots + \mu_m \Phi_m)$. Die zu $g_{\max}$ an Stelle von g gehörenden Eigenwerte nennen wir $\Gamma^{\max}$, die zu $g_{\min}$ an Stelle von g gehörende dagegen $\Gamma^{\min}$. Dann gelten auch im vorliegenden Fall die Gleichungen (13 sowie die Ungleichungen:

$$\text{für } M \text{ positiv definit: } \gamma_{+n} \geqq \Gamma^{\max}_{+n};\quad \gamma_{-n} \leqq \Gamma^{\min}_{-n};$$
$$\text{für } M \text{ negativ definit: } \gamma_{-n} \leqq \Gamma^{\max}_{-n};\quad \gamma_{+n} \geqq \Gamma^{\min}_{+n}.$$

Falls wir $g_{\max} = |g_{\min}|$ wählen, indem der kleinste der beiden absoluten Wert dem größten gleich gemacht wird, ist:

$$\Gamma^{\max}_{+n} = \left|\Gamma^{\min}_{-n}\right| = \left|\Gamma^{\max}_{-n}\right| = \Gamma^{\min}_{+n} = \Gamma$$

und:

$$|\gamma_{\pm n}| \geqq \Gamma.$$

§ 21.

Eigenwerthyperflächen.

Aus Gleichung (15) geht hervor, daß die Eigenwerte im vorliegenden Fall f analytischen Hyperflächen liegen, welche je durch eine analytische Glei- ung mit den $m + 1$ Parametern als Veränderlichen bestimmt werden. Aus ymptotischen Betrachtungen (vgl. § 23) kann geschlossen werden, daß für den gegebenen σ-Wert abzählbar viele und zwar ∞^1 solcher Hyperflächen rhanden sind. Die Überlegungen von § 5 führen auch im vorliegenden Fall m Schluß, daß durch jeden Punkt $\lambda, \gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_m$ des $(m + 1)$-dimensionalen aumes höchstens zwei verschiedene Eigenwerthyperflächen hindurchgehen nnen, und daß ein solcher zweifacher Eigenwert nur für $\sigma = +1$ oder $= -1$ auftreten kann. Weiter ergibt sich, daß λ eine ganze transzendente nktion der Parameter $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m$ für jene Eigenwertflächen ist, für die t: $|\sigma| = 1$ (vgl. unten). Hierdurch ist es ausgeschlossen, daß durch einen nkt eine und dieselbe Eigenwerthyperfläche zweimal hindurchgeht.

Eine Wiederholung der Rechnung von § 7 für den vorliegenden Fall führt i einem einfachen Eigenwert auf die Gleichungen:

$$7) \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_1} = -\frac{\int_{z_0}^{z_1} \Phi_1 w w^* dz}{\int_{z_0}^{z_1} w w^* dz}; \quad \cdots \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_m} = -\frac{\int_{z_0}^{z_1} \Phi_m w w^* dz}{\int_{z_0}^{z_1} w w^* dz}.$$

i einem zweifachen Eigenwert ergibt sich für jeden dieser Differential- otienten eine der Gleichung (17a) analoge Gleichung, in der $\bar{\alpha}_{kl}$ die gleiche deutung hat, aber $\bar{\beta}_{kl}$ durch:

$$\bar{\beta}_{kl} = \int_{z_0}^{z_1} \Phi_r w_k w_l dz; \quad r = 1, 2, \ldots m; \; k, l = 1, 2$$

geben ist. Die beiden Berührungshyperebenen werden durch die Gleichungen:

$$\lambda = \Lambda + \Delta_{11}(\gamma_1 - \Gamma_1) + \Delta_{21}(\gamma_2 - \Gamma_2) + \cdots + \Delta_{m1}(\gamma_m - \Gamma_m);$$
$$\lambda = \Lambda + \Delta_{12}(\gamma_1 - \Gamma_1) + \Delta_{22}(\gamma_2 - \Gamma_2) + \cdots + \Delta_{m2}(\gamma_m - \Gamma_m)$$

rgestellt, in denen der Eigenwert durch $\Lambda, \Gamma_1, \ldots \Gamma_m$ bestimmt ist, während $_1, \ldots \Delta_{m1}$ sowie $\Delta_{21}, \ldots \Delta_{m2}$ die Werte der Differentialquotienten $/\partial\gamma_1, \ldots \partial\lambda/\partial\gamma_m$ im betreffenden Eigenwertpunkt bezeichnen, welche s (17a) hervorgehen. Wie im Anschluß an (17a) erörtert, gehören auch r jene Werte dieser Größen jeweils zu einer Berührungshyperebene, bei nen die aus (17a) hervorgehende Quadratwurzel das gleiche Vorzeichen hat.

In analoger Weise wie in § 8 gezeigt, ergibt sich aus den obigen Werten n $\partial\lambda/\partial\gamma_1, \partial\lambda/\partial\gamma_2, \ldots \partial\lambda/\partial\gamma_m$, daß λ für jene Eigenwertflächen, welche

zu $|\sigma| = 1$ gehören, eine ganze transzendente Funktion von $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_m$ is
Auch die weiteren Bemerkungen am Ende von § 8 können sinngemäß auf diese
Fall übertragen werden.

Die in § 9 durchgeführten Berechnungen ergeben im vorliegenden Fa
unmittelbar Werte für $\partial^2\lambda/\partial\gamma_1^2$, $\partial^2\lambda/\partial\gamma_2^2$, ... $\partial^2\lambda/\partial\gamma_1\,\partial\gamma_2$ usw., welche durc
einfache Änderungen der Formeln (23), (24) und (25) angeschrieben werde
können.

§ 22.

Lage und Verlauf der Eigenwerthyperflächen.

Im Anschluß an die Ausführungen in § 10 können wir die Lagenordnun
der Eigenwerte nach O. Haupt und H. A. Kramers auf Geraden ausdehne
welche als Schnitt der m Hyperebenen:

$$\gamma_1 - \Gamma_1 = (\lambda - \Lambda_0)\,\mathrm{tg}\,\varphi_1;$$
$$\gamma_2 - \Gamma_2 = (\lambda - \Lambda_0)\,\mathrm{tg}\,\varphi_2;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\gamma_m - \Gamma_m = (\lambda - \Lambda_0)\,\mathrm{tg}\,\varphi_m$$

durch den Punkt Λ_0, Γ_1, Γ_2, ... Γ_m gehen. Die betreffenden Sätze: *Fü*
$\lambda \to -\infty$ *gilt*:

$$f \to + \exp\{\sqrt{|\lambda|}\cdot\int_{z_0}^{z_1}(1 + \Phi_1\,\mathrm{tg}\,\varphi_1 + \Phi_2\,\mathrm{tg}\,\varphi_2 + \cdots + \Phi_m\,\mathrm{tg}\,\varphi_m)^{1/2}\,dz\};$$

*bei wachsendem λ sinkt f bis zu einem kleinsten Wert herab und pendelt dan
weiter jeweils zwischen einem Minimum und einem Maximum hin und he
für $\partial f/\partial\lambda = 0$ gilt*: $|f| \geqq 2$ *und* $f\cdot\partial^2 f/\partial\lambda^2 < 0$; gelten im Falle, da
$1 + \Phi_1\,\mathrm{tg}\,\varphi_1 + \cdots + \Phi_m\,\mathrm{tg}\,\varphi_m$ positiv ist.

In der Umgebung der λ-Achse stimmt der Verlauf der Eigenwerthype
flächen mit jenem der Eigenwertflächen nach § 11 überein und die dortige
Sätze können sinngemäß auf den vorliegenden Fall übertragen werden.

Der erste Satz von § 12 lautet hier: Alle Eigenwerthyperflächen f
$|\sigma| = 1$ verlaufen für $-\infty < \lambda \leqq 0$ derart, daß $\gamma\cdot\partial\gamma/\partial\lambda < 0$ ist, w
$\gamma_1 = \mu_1\gamma$; $\gamma_2 = \mu_2\gamma$; ... $\gamma_m = \mu_m\gamma$. Der im Anschluß an Gleichung (37)
§ 12 bewiesene Minimalsatz für die Eigenwertflächen mit den jeweils kleinste
λ-Eigenwerten, für welche λ eine eindeutige Funktion von γ_1 und γ_2 ist, kan
ebenfalls auf den Fall mehrerer Parameter γ übertragen werden. Für die en
sprechenden Eigenwerthyperflächen gilt $\partial^2\lambda/\partial\gamma^2 < 0$, wo γ die oben a
gegebene Bedeutung hat. Dieser Satz kann auch aus den Differentialquotient
2. Ordnung gefolgert werden, welche oben in § 21 für den Fall von m Paramete
$\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m$ genannt wurden.

§ 23.

Asymptotischer Verlauf der Eigenwerthyperflächen.

Wir betrachten zuerst den Fall, daß die Funktion $\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2 + \cdots + \gamma_m \Phi_m$ im Bereich $z_0 \leqq z \leqq z_1$ genau *zwei* Nullstellen aufweist. it den Abkürzungen:

$$\beta_1 = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \cdots + \gamma_m \Phi_m)^{1/2} dz;$$

$$\beta_2 = \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} |\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \cdots + \gamma_m \Phi_m|^{1/2} dz,$$

$\alpha_3 = \alpha_1 + \zeta$, während die obige Klammerfunktion im Bereich $\alpha_1 \leqq z \leqq \alpha_2$ sitiv und im Bereich $\alpha_2 \leqq z \leqq \alpha_3$ negativ ist, ergeben sich die Eigenwert- eichungen (47) und (48). Die weiteren Betrachtungen von § 14 können sinngemäß ernommen werden. Falls wieder: $\gamma_1 = \mu_1 \gamma$; $\gamma_2 = \mu_2 \gamma$; $\ldots$ $\gamma_m = \mu_m \gamma$ ge- tzt wird, kann geschlossen werden, daß β_1 und β_2 *monotone* Funktionen von λ d von γ sind. Bei veränderlichen Werten der Parameter sind stets zwei d nur zwei Nullstellen vorhanden, falls $\gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2 + \cdots + \gamma_m \Phi_m$ bei achsendem z in der Periode ζ monoton von einem kleinsten bis zu einem chsten und dann wieder bis zum kleinsten Wert verläuft. Die von O. Haupt d H. A. Kramers (vgl. § 22) angegebene Reihenfolge der Eigenwerte gilt ymptotisch entlang jeder Geraden durch die λ-Achse oder parallel zu dieser hse. Asymptotisch liegen je zwei gleichnamige periodische Eigenwert- chen nahe zusammen, was man daran erkennt, daß der Abstand der Schnitt- nkte zweier solcher Flächen mit einer Geraden der genannten Art von der ößenordnung:

$$(\sqrt{|\lambda|} + \sqrt{|\gamma_1|} + \cdots + \sqrt{|\gamma_m|}) \exp\{-\zeta (\sqrt{|\lambda|} + \sqrt{|\gamma_1|} + \cdots + \sqrt{|\gamma_m|})\}$$

t. Bei abnehmendem λ und konstanten Werten der übrigen Parameter cken zwei Eigenwerthyperflächen der genannten Art näher zusammen. ie weiteren Sätze von § 16 gelten sinngemäß auch im vorliegenden Fall. eraden 1. Art sind jetzt durch die Ungleichung:

$$\psi \equiv 1 + \Phi_1 \operatorname{tg} \varphi_1 + \Phi_2 \operatorname{tg} \varphi_2 + \cdots + \Phi_m \operatorname{tg} \varphi_m \geqq 0$$

stimmt und Geraden 2. Art durch die Ungleichung $\psi \gtreqless 0$.

Wir kommen, entsprechend den Betrachtungen von § 17, zum *asymp- ischen* Verlauf der Eigenwerthyperflächen. Im vorliegenden Fall ist: $\partial \lambda / \partial \gamma < 0$, wo γ die bereits obengenannte Bedeutung hat und pos. ist.

Falls stets zwei und nur zwei Nullstellen der Funktion $\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \cdots + \gamma_m \Phi$ vorhanden sind, während $\Phi_{\max}$ den größten (positiven) Wert dieser Funktio bei veränderlichem z bezeichnet, erhält man für $\lambda \to -\infty$ und γ posit asymptotisch: $\partial\lambda/\partial\gamma \to -\Phi_{\max}$. Bei monotoner Abnahme von λ nimm $|\partial\gamma/\partial\lambda|$ ebenfalls monoton ab. Asymptotisch ist $\partial^2\lambda/\partial\gamma^2$ für die Eigenwer hyperflächen negativ. Für $\lambda \to -\infty$ wird $|\partial^2\lambda/\partial\gamma^2| \to 0$. Auch hier näher sich alle Eigenwerthyperflächen für $|\sigma| \approx 1$ asymptotisch für $\lambda \to -$ den Eigenwerthyperflächen für $\sigma = \pm i$, denen Eigenfunktionen der Period 4ζ entsprechen.

Der Fall, daß die Funktion $\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2 + \cdots + \gamma_m \Phi_m$ im Grund bereich $2n$ Nullstellen aufweist, kann im Anschluß an die obigen Betrach tungen sowie an § 18 ohne weiteres in analoger Weise erledigt werden w jener zweier Nullstellen dieser Funktion.

§ 24.

Anwendungsbeispiel aus der mathematischen Physik.

Die Wellengleichung im dreidimensionalen Raum:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

führt nach Transformation auf ein System krummliniger orthogonaler ellipt scher Koordinaten nach Trennung der unabhängigen Veränderlichen au Differentialgleichungen der Form [15]):

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + y\,(h + a k^2\, sn^2 x + b\, dn^4 x) = 0.$$

Auf diese Gleichung wenden wir die Transformation:

$$z = am\,(x, k); \quad \frac{dz}{dx} = (1 - k^2 \sin^2 x)^{1/2}; \quad k^2 < 1$$

an und erhalten:

$$(1 - k^2 \sin^2 z)\frac{d^2 y}{d z^2} - k^2 \sin z \cos z \frac{d y}{d z} + \\ + \{h + a k^2 \sin^2 z + b\,(1 - k^2 \sin^2 z)^2\} \cdot y = 0.$$

Weiter setzen wir:

$$w = y e^{-\frac{1}{2}\int_{z_0}^{z} \frac{k^2 \sin z \cos z}{1 - k^2 \sin^2 z}\, dz}$$

[15]) Vgl. z. B. M. J. O. Strutt, Ergebn. d. Math. I, H. 3, S. 76, Berlin, Springe 1932.

d finden:

$$\frac{w}{} + w\left\{h + \frac{(h+a)\,k^2\sin^2 z}{1-k^2\sin^2 z} + b\,(1-k^2\sin^2 z)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\frac{k^2}{4}\cos^2 z\,(1+k^2\sin^2 z) + \frac{k^2}{4}\sin^2 z\,(k^2-1)}{(1-k^2\sin^2 z)^2}\right\} = 0.$$

enn wir nun $\lambda = h$, $\gamma_1 = h + a$, $\gamma_2 = b$ und $\gamma_3 = 1$ setzen, sowie

$$\Phi_1 = \frac{k^2\sin^2 z}{1-k^2\sin^2 z}; \quad \Phi_2 = (1-k^2\sin^2 z)^2;$$

$$\Phi_3 = \frac{\frac{k^2}{4}\cos^2 z\,(1+k^2\sin^2 z) + \frac{k^2}{4}\sin^2 z\,(k^2-1)}{(1-k^2\sin^2 z)^2},$$

langen wir zu einer erweiterten Hillschen Gleichung mit vier Parametern.

Ich möchte an dieser Stelle Herrn N. S. Markus für seine Hilfe bei r Berechnung der Greenschen Funktionen (4) und (4a) sowie der ob. 1, 3 und 4 herzlich danken.

(Eingegangen am 30. Mai 1943.)

Ein Satz über die absolute Konvergenz der Fourier-Reihe.

Von

Ludwig Neder in Münster (Westf.).

Über die absolute Konvergenz der Fourier-Reihe einer gegebene Funktion $f(x)$ hat SERGE BERNSTEIN[1]) folgenden Satz veröffentlicht:

Wenn die Funktion $f(x)$ stetig und mod 2π periodisch ist, und wenn si der Lipschitz-Bedingung genügt

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqq c|x_1 - x_2|^{\alpha}, \quad \text{wobei } \alpha > \tfrac{1}{2},$$

so ist ihre Fourier-Reihe absolut konvergent für alle x, d. h. es konvergier die Reihe

$$\sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_r^2 + \beta_r^2}, \tag{1}$$

wenn α_0 und α_r, β_r die Fourier-Koeffizienten der Funktion $f(x)$ sind.

Diesen Satz wollen wir nachstehend verschärfen, indem wir zur Ab kürzung für $t > 0$ setzen

$$l_1(t) = \log\left(e + \frac{1}{t}\right), \quad l_2(t) = \log\log\left(e^e + \frac{1}{t}\right),$$

$$l_3(t) = \log\log\log\left(e^{e^e} + \frac{1}{t}\right), \ \ldots$$

und dann die Funktion $f(x)$ nur der folgenden Lipschitz-Bedingung unter werfen:

$$|f(x \pm t) - f(x)| \leqq \frac{c t^{\frac{1}{2}}}{l_1(t) \cdot l_2(t) \ldots l_{k-1}(t) \cdot l_k(t)^{1+\varkappa}},$$

wobei x beliebig, $t > 0$. k = eine natürliche Zahl und $\varkappa > 0$. Es dürft dabei genügen, den Beweis für den Fall $k = 2$ vorzuführen, da der allgemein Fall dann keine Schwierigkeiten bietet. Wir beweisen also den folgende

Hauptsatz. *Wenn die mod 2π periodische, überdies stetige Funktio $f(x)$ der Lipschitz-Bedingung genügt*

$$|f(x \pm t) - f(x)| \leqq \frac{c t^{\frac{1}{2}}}{l_1(t) \cdot l_2(t)^{1+\varkappa}} \ (x \text{ beliebig}, \ t > 0, \ \varkappa > 0),$$

so konvergiert ihre Fourier-Reihe absolut, d. h. es konvergiert die Reihe (1

[1]) S. BERNSTEIN, Sur la convergence absolue des séries trigonométriques. Paris Comptes Rendus **158** (1919), S. 1661; vgl. auch den Beweis in dem Buche von L. T NELLI: Serie trigonometriche (Bologna 1928) auf S. 255.

Dem Beweise dieses Satzes schicken wir zwei Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 1. Es gilt die Beziehung

$$I_n = \frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi} t^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\right)^2 dt \leqq \frac{k}{n^{\frac{1}{2}}} \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Bemerkung. Diese Ungleichung bildet den Hauptteil vom Beweise des sogenannten Lemmas von S. Bernstein im Falle $\alpha = \frac{1}{2}$ [2]). Sie ist daher bekannt.

Hilfssatz 2. Unter den Voraussetzungen unseres Hauptsatzes gilt, wenn $\sigma_n(x)$ das Fejersche Polynom $(n-1)$-ter Ordnung zur Fourier-Reihe von $f(x)$ bedeutet, die Ungleichung

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leqq \frac{cK}{n^{\frac{1}{2}} \cdot \log n \cdot (\log\log n)^{1+\varkappa}} \quad \text{für große } n,$$

wobei die Konstante K nur von $\varkappa$ abhängt.

Beweis. Es ist

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi} \left[\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - f(x)\right] \cdot \left(\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\right)^2 dt$$

und daher

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leqq \frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi} \frac{c t^{\frac{1}{2}}}{l_1(t) \cdot l_2(t)^{1+\varkappa}} \cdot \left(\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\right)^2 dt.$$

Dieses Integral zerlegen wir beim Punkte $t = \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}$ in zwei Teile. Dann ist für alle großen n im ersten Teil

$$t \leqq \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}, \quad \frac{1}{t} \geqq n^{\frac{1}{4}}, \quad \text{also } l_1(t) \geqq \frac{1}{4}\log n, \quad l_2(t) \geqq \frac{1}{2}\log\log n,$$

und im zweiten Teil

$$\frac{1}{t} \geqq 0, \quad \text{also } l_1(t) \geqq 1, \quad l_2(t) \geqq 1, \quad \text{sowie } \sin\frac{1}{2}t \geqq \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{2}\,t \geqq \frac{1}{\pi n^{\frac{1}{4}}},$$

[2]) Vgl. L. Tonelli, a. a. O., S. 252.

so daß man erhält

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leqq \frac{2^{3+\varkappa} c}{\log n \cdot (\log\log n)^{1+\varkappa}} \cdot I_n + \frac{1}{\pi n} \cdot \pi \cdot \frac{c}{n^{\frac{1}{8}}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\pi^2 n^{\frac{1}{2}}}} \text{ [3]}$$

$$\leqq \frac{c}{n^{\frac{1}{2}} \cdot \log n \cdot (\log\log n)^{1+\varkappa}} \left\{ 2^{3+\varkappa} k + \pi^2 \frac{\log n \cdot (\log\log n)^{1+\varkappa}}{n^{\frac{1}{8}}} \right\},$$

womit unsere Abschätzung bewiesen ist, da der Quotient in der Klammer bei $n \to \infty$ gegen Null geht.

Beweis des Hauptsatzes. Die Fourier-Reihe der Funktion $f(x) - \sigma_n(x)$ hat formal die Gestalt

$$\sum_{r=1}^{n-1} \frac{r}{n} (\alpha_r \cos r x + \beta_r \sin r x) + \sum_{r=n}^{\infty} (\alpha_r \cos r x + \beta_r \sin r x),$$

wenn α_0 und α_r, β_r die Fourier-Koeffizienten von $f(x)$ bedeuten. Aus der Besselschen Ungleichung folgt daher für alle großen n

$$\sum_{r=n+1}^{2n} (\alpha_r^2 + \beta_r^2) \leqq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f(x) - \sigma_n(x)]^2 \, dx \leqq \frac{2 c^2 K^2}{n \cdot (\log n)^2 \cdot (\log\log n)^{2+2\varkappa}}$$

und weiter

$$\sum_{r=n+1}^{2n} \sqrt{\alpha_r^2 + \beta_r^2} \leqq \sqrt{\sum_{r=n+1}^{2n} 1 \cdot \sum_{r=n+1}^{2n} (\alpha_r^2 + \beta_r^2)} \leqq \frac{c K \sqrt{2}}{\log n \cdot (\log\log n)^{1+\varkappa}}.$$

Diese Ungleichung verwenden wir für $n = 2^\nu$ bei genügend großem ν und finden

$$\sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} \sum_{r=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} \sqrt{\alpha_r^2 + \beta_r^2} \leqq \text{const.} \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} \frac{1}{\nu \cdot (\log \nu)^{1+\varkappa}},$$

womit die Konvergenz der Reihe (1) bewiesen ist.

---

[3]) Bei der Abschätzung des zweiten Teils muß man zunächst $\sin \frac{1}{2} t \geqq \frac{1}{\pi} t$ verwenden, dann den Faktor $t^{\frac{1}{2}}$ wegheben und dann $t \geqq n^{-\frac{1}{4}}$ berücksichtigen. Der Effekt ist derselbe, wie wenn man, zugleich an beiden fraglichen Stellen, für t die genannte Schranke einsetzt.

(Eingegangen am 12. Juni 1943.)

ine Bemerkung zum Schreierschen Verfeinerungssatz.

Von

Paul Lorenzen, z. Z. in Wesermünde.

Der SCHREIERsche Verfeinerungssatz[1]) sagt aus, daß zwei normale Ketten on Untergruppen einer Gruppe stets normale, isomorphe Verfeinerungen esitzen.

Die vorliegende Arbeit sucht nicht die Einordnung dieses Satzes in die erbandstheorie[2]), sondern in die Theorie der Äquivalenzrelationen[3]). Wir eben zunächst eine Herleitung des Verfeinerungssatzes aus einem Axiomen-stem, in dem als Grundbegriffe nur auftreten: Untermengen einer Gruppe G, ntergruppen von G, Durchschnitt und Produkt.

§ 3 zeigt dann, daß das Axiomensystem auch erfüllt wird, wenn statt der ntermengen einer Gruppe G zweistellige Relationen in einer beliebigen enge M genommen werden, und statt der Untergruppen von G die Äqui-lenzrelationen von M. Es läßt sich dann nämlich Durchschnitt und Produkt eignet definieren. Aus der axiomatischen Herleitung erhält man also einen erfeinerungssatz für Ketten von Äquivalenzrelationen beliebiger Mengen.

Die Tatsache, daß das Axiomensystem von den Untermengen einer Gruppe id von den zweistelligen Relationen einer beliebigen Menge erfüllt wird, klärt sich in § 4 daraus, daß die Untermengen einer Gruppe G sich bezüg-h Durchschnitt und Produkt isomorph den monotonen Relationen in G ordnen lassen. Bei diesem Isomorphismus werden die Untergruppen von G rade den monotonen Äquivalenzrelationen von G zugeordnet.

§ 1.

R sei eine Menge mit den Elementen $\alpha, \beta, \ldots$.

Es seien folgende Axiome erfüllt:

I. Es ist eine Relation $\leqq$ in R definiert, d. h. für je zwei Elemente α und β definiert, ob $\alpha \leqq \beta$ gilt oder nicht. Dabei gilt für alle Elemente α, β und γ:

$$\alpha \leqq \alpha$$

$$\alpha \leqq \beta, \quad \beta \leqq \gamma \rightarrow \alpha \leqq \gamma^{4})$$

$$\alpha \leqq \beta, \quad \beta \leqq \alpha \rightarrow \alpha = \beta.$$

[1]) Vgl. H. ZASSENHAUS, Abh. Math. Seminar Hamburg **10** (1934).

[2]) Vgl. z. B. E. GEORGE, Journ. f. Math. **180** (1939); V. KORINEK, Vestn. Kra-vske ceske **14** (1941).

[3]) Ein ähnliches Ziel hat die Arbeit von O. BORUVKA, Math. Annalen **118** (1941).

[4]) Dies ist eine Abkürzung für: wenn $\alpha \leqq \beta$ und $\beta \leqq \gamma$ gilt, so gilt $\alpha \leqq \gamma$. Diese kürzung wird in der ganzen Arbeit benutzt.

II. Je zwei Elemente α und β lassen sich zu einem eindeutig bestimmte Element $\alpha \wedge \beta$ von R verknüpfen. Dabei gilt für alle Elemente α, β und γ

$$\alpha \wedge \beta \leqq \alpha$$
$$\alpha \wedge \beta \leqq \beta$$
$$\gamma \leqq \alpha, \quad \gamma \leqq \beta \rightarrow \gamma \leqq \alpha \wedge \beta.$$

III. Je zwei Elemente α und β lassen sich zu einem eindeutig bestimmte Element $\alpha\beta$ von R verknüpfen. Dabei gilt für alle α, β und γ:

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma.$$

IV. Für alle Elemente α_1, α_2, β_1 und β_2 gilt:

$$\alpha_1 \leqq \beta_1, \quad \alpha_2 \leqq \beta_2 \rightarrow \alpha_1\alpha_2 \leqq \beta_1\beta_2.$$

Es sei außerdem S eine Untermenge von R, die folgende Axiome erfüllt

V. Für alle Elemente α und β gilt:

$$\alpha \in S, \quad \beta \in S \rightarrow \alpha \wedge \beta \in S.$$

VI. Für alle Elemente α und β gilt:

$$\alpha \in S, \quad \beta \in S, \quad \alpha\beta = \beta\alpha \rightarrow \alpha\beta \in S.$$

VII. Für alle Elemente α, β und γ von S gilt:

$$\alpha \leqq \alpha\beta$$
$$\beta \leqq \alpha\beta$$
$$\alpha \leqq \gamma, \quad \beta \leqq \gamma \rightarrow \alpha\beta \leqq \gamma.$$

VIII. Für alle Elemente α, β und γ gilt:

$$\alpha \in S, \quad \gamma \leqq \alpha \rightarrow \alpha \wedge \beta\gamma = (\alpha \wedge \beta)\gamma,$$
$$\alpha \in S, \quad \gamma \leqq \alpha \rightarrow \alpha_1\gamma\beta = \gamma(\alpha \wedge \beta).$$

Als Modell für das Axiomensystem I bis VIII kann man das folgende nehmen

R sei die Menge aller Untermengen einer Gruppe G. Wir setzen für zwe Untermengen α und β fest, daß $\alpha \leqq \beta$ gelten soll, wenn α Untermenge vo β ist.

Wir definieren $\alpha \wedge \beta$ als Durchschnitt von α und β und $\alpha\beta$ als da Produkt, das aus den Elementen ab von G mit $a \in \alpha$ und $b \in \beta$ besteht.

S sei die Menge aller Untergruppen von G.

Dieses Modell erfüllt bekanntlich alle Axiome.

§ 2.

Wir wollen jetzt aus den Axiomen I bis VIII einen Verfeinerungssat herleiten. Dazu brauchen wir folgende Definitionen:

Unter einer Kette A verstehen wir eine endliche Folge $[\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ von Elementen von S, in der $\alpha_i \leqq \alpha_{i-1}$ gilt für $i = 1, \ldots, n$. Die Elemente α

ißen die Glieder von A, α_0 und α_n heißen die Endglieder. Eine Kette A ißt Verfeinerung einer Kette B, wenn jedes Glied von B auch Glied von A ist.

Eine zweigliedrige Kette $[\alpha, \beta]$ heißt ein Quotient. Ist $A = [\alpha_0, \ldots, \alpha_n]$ ne Kette, so heißen die Quotienten $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ für $i = 1, \ldots, n$ die Quonten von A.

Wir nennen einen Quotienten $[\alpha, \beta]$ normal, wenn für alle Elemente γ n R [5]) gilt

$$\gamma \leqq \alpha \to \beta\gamma = \gamma\beta.$$

ne Kette heißt normal, wenn alle ihre Quotienten normal sind.

Hilfssatz 1. Sind $[\alpha, \beta]$ und $[\alpha, \gamma]$ normale Quotienten, so ist auch der uotient $[\alpha, \beta\gamma]$ normal.

Beweis. Für jedes Element δ folgt aus $\delta \leqq \alpha$ sofort $\beta\,\delta = \delta\beta$ und $= \delta\gamma$, also wegen III auch

$$(\beta\gamma)\,\delta = \beta\gamma\delta = \beta\delta\gamma = \delta\beta\gamma = \delta\,(\beta\gamma).$$

Hilfssatz 2. Ist $[\alpha, \beta]$ ein normaler Quotient, so ist für jedes Elent γ von S auch der Quotient $[\alpha \wedge \gamma, \beta \wedge \gamma]$ normal.

Beweis. Für jedes Element δ folgt aus $\delta \leqq \alpha \wedge \gamma$ sofort $\delta\beta = \beta\delta$ gen $\delta \leqq \alpha$, und wegen $\delta \leqq \gamma$ also

$$\delta(\beta \wedge \gamma) = \delta\beta \wedge \gamma = \beta\delta \wedge \gamma = (\beta \wedge \gamma)\,\delta.$$

Ein Quotient $[\gamma, \delta]$ heißt isomorpher Teil eines Quotienten $[\alpha, \beta]$, nn $\alpha = \beta\gamma$ und $\delta = \beta \wedge \gamma$ gilt.

Hilfssatz 3. Ist $[\alpha, \beta]$ ein normaler Quotient und $[\gamma, \delta]$ isomorpher il von $[\alpha, \beta]$, so ist auch $[\gamma, \delta]$ normal. Ferner lassen sich die Elemente ζ n S, für die $\beta \leqq \zeta \leqq \alpha$ gilt, eineindeutig den Elementen η von S, für die $\leqq \eta \leqq \gamma$ gilt, zuordnen, so daß für einander zugeordnete Elemente ζ und η r Quotient $[\gamma, \eta]$ bzw. $[\eta, \delta]$ isomorpher Teil ist von $[\alpha, \zeta]$ bzw. $[\zeta, \beta]$.

Beweis. $[\gamma, \delta]$ ist normal nach Hilfssatz 2, denn

$$[\gamma, \delta] = [\alpha \wedge \gamma, \beta \wedge \gamma].$$

lt $\beta \leqq \zeta \leqq \alpha$, so ordnen wir ζ das Element $\zeta \wedge \gamma$ zu. Gilt $\delta \leqq \eta \leqq \gamma$, ordnen wir η das Element $\eta\beta$ zu (da $[\alpha, \beta]$ normal ist, folgt aus $\eta \leqq \alpha$ ort $\eta\beta = \beta\eta \in S$). Wegen

$$(\zeta \wedge \gamma)\beta = \zeta \wedge \gamma\beta = \zeta \wedge \alpha = \zeta$$

d

$$\eta\beta \wedge \gamma = \eta(\beta \wedge \gamma) = \eta\delta = \eta$$

[5]) Beschränkt man γ auf Elemente von S, so bleiben die folgenden Sätze ebenfalls tig. Wegen der Anwendung auf das gruppentheoretische Modell von § 1 durchläuft γ Elemente von R.

ist diese Zuordnung eineindeutig. Schließlich ist $[\gamma, \eta]$ isomorpher Teil vo $[\alpha, \eta\beta]$, denn $\alpha = \eta\beta\gamma$ und $\eta = \eta\beta \wedge \gamma$. Ebenso ist $[\eta, \delta]$ isomorpher Te von $[\eta\beta, \beta]$, denn $\delta = \beta \wedge \delta \leqq \beta \wedge \eta \leqq \beta \wedge \gamma = \delta$.

Auf Grund dieses Hilfssatzes nennen wir einen Quotienten $[\alpha, \beta]$ fas normal, wenn es Elemente α', β', γ' und γ von S gibt, für die gilt:

1. $\gamma \leqq \beta \leqq \alpha$.
2. $[\alpha, \gamma]$ ist normal.
3. $[\alpha', \gamma']$ ist isomorpher Teil von $[\alpha, \gamma]$.
4. $\gamma' \leqq \beta' \leqq \alpha'$.
5. $\beta = \beta'\gamma$, $\beta' = \beta \wedge \alpha'$.
6. $[\alpha', \beta']$ ist normal.

Eine Kette heißt fastnormal, wenn alle ihre Quotienten fastnormal sin

Hilfssatz 4. Sind $[\alpha_1, \alpha_2]$ und $[\beta_1, \beta_2]$ normale Quotienten, so sin die Quotienten $[\alpha_2(\alpha_1 \wedge \beta_1), \alpha_2(\alpha_1 \wedge \beta_2)]$ und $[\beta_2(\alpha_1 \wedge \beta_1), \beta_2(\alpha_2 \wedge \beta_1)]$ fas normal.

Beweis. Nach Hilfssatz 2 ist $[\alpha_2(\alpha_1 \wedge \beta_1), \alpha_2]$ bzw. $[\beta_2(\alpha_1 \wedge \beta_1), \beta$ normal. $[\alpha_1 \wedge \beta_1, \alpha_2 \wedge \beta_1]$ bzw. $[\alpha_1 \wedge \beta_1, \alpha_1 \wedge \beta_2]$ ist isomorpher Teil vo $[\alpha_2(\alpha_1 \wedge \beta_1), \alpha_2]$ bzw. $[\beta_2(\alpha_1 \wedge \beta_1), \beta_2]$. Dem Element $(\alpha_1 \wedge \beta_2)(\alpha_2 \wedge \beta_1$ für das

$$\alpha_2 \wedge \beta_1 \leqq (\alpha_1 \wedge \beta_2)(\alpha_2 \wedge \beta_1) \leqq \alpha_1 \wedge \beta_1$$

bzw.

$$\alpha_1 \wedge \beta_2 \leqq (\alpha_1 \wedge \beta_2)(\alpha_2 \wedge \beta_1) \leqq \alpha_1 \wedge \beta_1$$

gilt, ist nach Hilfssatz 3 das Element $\alpha_2(\alpha_1 \wedge \beta_2)$ bzw. $\beta_2(\alpha_2 \wedge \beta_1)$ zugeordne

Schließlich ist $[\alpha_1 \wedge \beta_1, (\alpha_1 \wedge \beta_2)(\alpha_2 \wedge \beta_1)]$ nach Hilfssatz 1 norma Damit ist Hilfssatz 4 bewiesen.

Wir nennen zwei Quotienten $[\alpha_1, \alpha_2]$ und $[\beta_1, \beta_2]$ isomorph, wenn s einen gemeinsamen isomorphen Teil besitzen, d. h. wenn es einen Quotiente $[\gamma, \delta]$ gibt, so daß $[\gamma, \delta]$ isomorpher Teil ist von $[\alpha_1, \alpha_2]$ und $[\beta_1, \beta_2]$. Zw Ketten heißen isomorph, wenn sich die Quotienten der Ketten einand eineindeutig so zuordnen lassen, daß zugeordnete Quotienten isomorph sin

Mit dieser Definition läßt sich Hilfssatz 4 dadurch ergänzen, daß d Quotienten $[\alpha_2(\alpha_1 \wedge \beta_1), \alpha_2(\alpha_1 \wedge \beta_2)]$ und $[\beta_2(\alpha_1 \wedge \beta_1), \beta_2(\alpha_2 \wedge \beta_1)]$ isomorp sind. Der gemeinsame isomorphe Teil ist nämlich $[\alpha_1 \wedge \beta_1, (\alpha_1 \wedge \beta_2)(\alpha_2 \wedge \beta_1$ Jetzt ergibt sich unmittelbar der folgende

Verfeinerungssatz. Gleichendige, normale Ketten haben fastnormal isomorphe Verfeinerungen. D. h. sind $A = [\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m]$ und $B = [\beta_0, \beta$ $\ldots, \beta_n]$ normale Ketten und ist $\alpha_0 = \beta_0$ und $\alpha_m = \beta_n$, so gibt es Ketten A und B', so daß A' bzw. B' eine fastnormale Verfeinerung von A bzw. B is und A' und B' isomorph sind.

Beweis[1]). Wir bilden die Kette A' aus den Gliedern:

$$\alpha_0 = \alpha_1(\alpha_0 \wedge \beta_0)$$
$$\alpha_1(\alpha_0 \wedge \beta_1), \alpha_1(\alpha_0 \wedge \beta_2), \ldots, \alpha_1(\alpha_0 \wedge \beta_n) = \alpha_1 = \alpha_2(\alpha_1 \wedge \beta_0)$$
$$\alpha_2(\alpha_1 \wedge \beta_1), \alpha_2(\alpha_1 \wedge \beta_2), \ldots, \alpha_2(\alpha_1 \wedge \beta_n) = \alpha_2 = \alpha_3(\alpha_2 \wedge \beta_0)$$
$$\ldots$$
$$\alpha_m(\alpha_{m-1} \wedge \beta_1), \alpha_m(\alpha_{m-1} \wedge \beta_2), \ldots, \alpha_m(\alpha_{m-1} \wedge \beta_n) = \alpha_m$$

nd die Kette B' aus den Gliedern:

$$\beta_0 = \beta_1(\alpha_0 \wedge \beta_0)$$
$$\beta_1(\alpha_1 \wedge \beta_0), \beta_1(\alpha_2 \wedge \beta_0), \ldots, \beta_1(\alpha_m \wedge \beta_0) = \beta_1 = \beta_2(\alpha_0 \wedge \beta_1)$$
$$\ldots$$
$$\beta_n(\alpha_1 \wedge \beta_{n-1}), \beta_n(\alpha_2 \wedge \beta_{n-1}), \ldots, \beta_n(\alpha_m \wedge \beta_{n-1}) = \beta_n.$$

$'$ bzw. B' ist Verfeinerung von A bzw. B. Außerdem sind nach Hilfssatz 4 e Quotienten $[\alpha_i(\alpha_{i-1} \wedge \beta_{j-1}),\ \alpha_i(\alpha_{i-1} \wedge \beta_j)]$ und $[\beta_j(\alpha_{i-1} \wedge \beta_{j-1}),$ $(\alpha_i \wedge \beta_{j-1})]$ fastnormal und einander isomorph, da ja $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ und $_{j-1}, \beta_j]$ normal sind.

Der Schreiersche Verfeinerungssatz entsteht durch Anwendung dieses tzes auf das in § 1 angegebene Modell. Man hat dazu nur zu zeigen, daß

1. eine normale Kette von Untergruppen auch in unserem Sinne normal ist,
2. zwei Ketten von Untergruppen, die in unserem Sinne isomorph sind, auch im üblichen Sinne isomorph sind,
3. eine Kette von Untergruppen, die in unserem Sinne fastnormal ist, im üblichen Sinne normal ist.

Zu 1.: Ist die Gruppe β Normalteiler der Gruppe α, so gilt für jedes lement a von α: $a\beta = \beta a$. Also gilt auch für jede Untermenge γ von α: $\beta = \beta\gamma$.

Zu 2. und 3.: Dies sind unmittelbare Folgerungen der Isomorphiesätze er Gruppentheorie[6]).

§ 3.

Wir geben jetzt ein weiteres Modell für das Axiomensystem I bis VIII an. M sei eine beliebige Menge und R die Menge der zweistelligen Relationen M, die wir mit α, β, ... bezeichnen. Ein Element α von R nennen wir quivalenzrelation von M, wenn α reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, h. wenn für alle Elemente a, b und c von M gilt:

$$a \alpha a$$
$$a \alpha b \to b \alpha a$$
$$a \alpha b,\quad b \alpha c \to a \alpha c.$$

ie Äquivalenzrelationen von M bilden eine Untermenge S von R.

[6]) Vgl. z. B. Enzykl. d. math. Wiss. **I**, 1, S. 9.

Um zu zeigen, daß die Elemente von R bzw. S das Axiomensystem I. bis VIII. erfüllen, definieren wir zunächst eine Relation $\leqq$ in R. Wir setzen fest, daß für zwei Elemente α und β genau dann $\alpha \leqq \beta$ gelten soll, wenn für alle Elemente a und b von M gilt:

$$a \alpha b \rightarrow a \beta b.$$

Dadurch wird I. erfüllt.

Wir verknüpfen je zwei Elemente α und β zu einem dritten Element $\alpha \wedge \beta$, indem wir festsetzen, daß für je zwei Elemente a und b von M genau dann $a \alpha \wedge \beta b$ gelten soll, wenn $a \alpha b$ und $a \beta b$ gilt.

Dadurch wird II. erfüllt.

Wir verknüpfen außerdem je zwei Elemente α und β zu einem Element $\alpha \beta$, indem wir festsetzen, daß für je zwei Elemente a und c von M genau dann $a \alpha \beta c$ gelten sollen, wenn es ein Element b von M gibt, so daß $a \alpha b$ und $b \beta c$ gilt.

Dadurch wird III. erfüllt.

Die Gültigkeit von IV. bis VII. ist ohne Schwierigkeit nachzuweisen. VIII. ergibt sich folgendermaßen: α sei eine Äquivalenzrelation von M, β und γ seien beliebige Relationen in M. Gilt dann $a \alpha \wedge \beta \gamma c$ für zwei Elemente a und c von M, so gilt $a \alpha c$ und $a \beta \gamma c$. Es gibt also ein Element b von M so daß $a \beta b$ und $b \gamma c$ gilt. Setzen wir jetzt noch $\gamma \leqq \alpha$ voraus, so folgt $b \alpha c$ und wegen $a \alpha c$ also auch $a \alpha b$. Hieraus ergibt sich $a \alpha \wedge \beta b$ und $b \gamma c$, d. h. $a (\alpha \wedge \beta) \gamma c$. Damit ist $\alpha \wedge \beta \gamma \leqq (\alpha \wedge \beta) \gamma$ bewiesen. $(\alpha \wedge \beta) \gamma \leqq \alpha \wedge \beta \gamma$ ist trivial, so daß $\alpha \wedge \beta \gamma = (\alpha \wedge \beta) \gamma$ folgt.

Ebenso ergibt sich $\alpha \wedge \gamma \beta = \gamma (\alpha \wedge \beta)$.

Damit ist die Gültigkeit der Axiome I. bis VIII. erwiesen.

Um die Bedeutung des Verfeinerungssatzes für Ketten von Äquivalenzrelationen, dessen Gültigkeit damit gleichzeitig erwiesen ist, zu erhellen, wollen wir noch untersuchen, wann ein Quotient $[\gamma, \delta]$ von Äquivalenzrelationen isomorpher Teil eines Quotienten $[\alpha, \beta]$ ist. Dazu brauchen wir folgende Definitionen:

Ist α eine Äquivalenzrelation von M und x ein Element von M, so heißt die Menge x^α der Elemente a, für die $a \alpha x$ gilt, eine Klasse von α.

Ist α eine Äquivalenzrelation von M und $\mathfrak{a}$ eine Untermenge von M, so bezeichnen wir mit $\alpha_\mathfrak{a}$ diejenige Äquivalenzrelation von $\mathfrak{a}$, deren Klassen $x^\alpha \cap \mathfrak{a}$ sind. Enthält jede Klasse von α mindestens ein Element von $\mathfrak{a}$, so heißt $\alpha_\mathfrak{a}$ ein unechter Teil von α.

Isomorphiesatz[7]). Sind $[\alpha, \beta]$ und $[\gamma, \delta]$ Quotienten von Äquivalenzrelationen von M, so ist $[\gamma, \delta]$ genau dann isomorpher Teil von $[\alpha, \beta]$, wenn für jedes Element x von M die Äquivalenzrelation δ_{x^γ} unechter Teil von β_{x^α} ist.

[7]) Dieser Satz verallgemeinert den 1. Isomorphiesatz der Gruppentheorie. Vgl. [6])

Beweis. 1. Es sei $[\gamma, \delta]$ isomorpher Teil von $[\alpha, \beta]$, d. h. $\alpha = \beta\gamma$ und $= \beta \wedge \gamma$. Dann gilt für jedes Element x von M $\delta_{x^\gamma} = (\beta \wedge \gamma)_{x^\gamma} = \beta_{x^\gamma}$ $(\beta_{x^\alpha})_{x^\gamma}$ wegen $x^\alpha = x^{\beta\gamma} \supseteq x^\gamma$. Also ist nur noch zu zeigen, daß jede asse von β_{x^α} mindestens ein Element von x^γ enthält. Ist a ein Element n x^α, so gilt $a\,\beta\,\gamma\,x$. Es gibt also ein Element b von M, für das $a\,\beta\,b$ und $\gamma\,x$ gilt. b gehört zur selben Klasse von β_{x^α} wie a und liegt außerdem in x^γ.

2. Es sei für jedes Element x von M die Äquivalenzrelation δ_{x^γ} unechter eil von β_{x^α}. Dann gilt $x^\alpha \supseteq x^\gamma$, d. h. $\gamma \leqq \alpha$. Wegen $\beta \leqq \alpha$ folgt hieraus $\gamma \leqq \alpha$. Gilt $a\,\alpha\,x$, so enthält a^β ein Element b von x^γ. Für dieses gilt so $a\,\beta\,b$ und $b\,\gamma\,x$, d. h. es gilt $a\,\beta\gamma\,x$. Damit ist auch $\alpha \leqq \beta\gamma$ bewiesen. egen $\beta_{x^\gamma} = \delta_{x^\gamma}$ gilt ferner $\delta \wedge \gamma \leqq \beta$ und $\beta \wedge \gamma \leqq \delta$. Hieraus folgt wegen $\leqq \gamma$ sofort $\delta = \beta \wedge \gamma$.

§ 4.

Die Beziehungen zwischen den Untermengen und Untergruppen einer ruppe einerseits und den Relationen und Äquivalenzrelationen einer Menge dererseits erschöpfen sich nicht darin, daß beide Bereiche den Axiomen I. s VIII. genügen. Es lassen sich vielmehr die Untermengen und Untergruppen ner Gruppe G bezüglich Durchschnitt und Produkt isomorph abbilden auf elationen und Äquivalenzrelationen von G.

Ist nämlich $\mathfrak{a}$ eine Untermenge von G, so definieren wir eine Relation α n G, indem wir für je zwei Elemente a und b von G festsetzen, daß $a\,\alpha\,b$ nau dann gelten soll, wenn ab^{-1} in $\mathfrak{a}$ liegt.

Diese Relation α ist dann monoton, d. h. für je drei Elemente a, b und c n G gilt stets

$$a\,\alpha\,b \rightarrow ac\,\alpha\,bc.$$

der Untermenge $\mathfrak{a}$ können wir also eine monotone Relation α zuordnen. an sieht dann sofort, daß

1. diese Zuordnung eineindeutig ist,

2. einer Untermenge $\mathfrak{a}$ genau dann eine monotone Äquivalenzrelation geordnet ist, wenn $\mathfrak{a}$ Untergruppe ist,

3. diese Zuordnung bezüglich Durchschnitt und Produkt isomorph ist, h. ist der Untermenge $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ die Relation α bzw. β zugeordnet, so ist der ntermenge $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ bzw. $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ die Relation $\alpha \wedge \beta$ bzw. $\alpha\beta$ zugeordnet.

Es ist also diese Isomorphie zwischen den Untermengen bzw. Unter- uppen von G und den monotonen Relationen bzw. Äquivalenzrelationen n G, durch den sich die Gültigkeit des Verfeinerungssatzes von dem einen reich auf den anderen überträgt.

(Eingegangen am 14. Juni 1943.)

Studien über den Vielfachheitsbegriff und den Bézoutschen Satz.

Von

Oskar Perron in München.

§ 1.

Einleitung.

Die algebraische Geometrie ist, nachdem ihr in Deutschland durch di grundlegenden Untersuchungen von A. Brill und M. Noether neue und stark Impulse gegeben waren, bekanntlich ausgewandert und hat eine Stätte sorg samster Pflege in Italien gefunden, wo sie durch die über mehr als ein halbe Jahrhundert sich erstreckende Arbeit vieler ausgezeichneter Forscher z einem imposanten Gebäude emporgewachsen ist. Dabei ging es aber ähnlic wie schon mehrfach vorher in anderen Zweigen der Mathematik: Die solid Fundamentierung des Gebäudes wurde außer acht gelassen. Erst al mählich merkte man dieses Versäumnis, und so schrieb im Jahre 1933 d Meister der algebraischen Geometrie, Ecc. Fr. Severi ([10], S. 341), mit Bezu auf eine Verallgemeinerung des Bézoutschen Satzes: „Man muß jedoc zugeben, daß die zu einer genauen Formulierung des Satzes nötigen Übe legungen mit algebraisch-geometrischen Methoden bisher noch nicht durc geführt worden sind, außer im Falle der ebenen Kurven. Das liegt dara daß die erfahrensten algebraischen Geometer die Gewißheit hatten, daß si jene Behauptungen ohne übertriebene Anstrengung würden in Ordnung bring lassen, sobald es von den Bedürfnissen einer systematischen, didaktisch vo kommenen Darstellung der Theorie gefordert würde. Und deshalb hatten si von anderen neuen und schwierigen Problemen gefesselt, eine Frage beisei gelegt, über deren Antwort sie vollkommen im klaren waren."

Bei dieser Feststellung darf aber nicht übersehen werden, daß in d letzten Jahrzehnten ganz unabhängig von der algebraischen Geometrie au die reine Algebra sich kräftig entwickelt hat und daß als eine der Früch dieser Entwicklung gerade die fehlende Fundamentierung der algebraisch Geometrie in ziemlichem, wenn auch zur Zeit wohl noch nicht erschöpfende Umfang geliefert worden ist. Es handelt sich dabei neben der Theorie d Polynomideale, von der ich in dieser Arbeit absehen will, vor allem um d allgemeinen Resultantenbegriff von Mertens und den darauf gegründet exakten Beweis des Bézoutschen Satzes mit Berücksichtigung der Vielfachhe

ın sind freilich die Originalarbeiten von MERTENS ([4], [5]) schwer zu lesen, d das Buch von J. KÖNIG [2], in dem diese Dinge behandelt sind, ist ebenfalls ine leichte Lektüre und auch nicht frei von Fehlern. Einfachere Zugänge r Resultante haben HURWITZ [1] und MACAULAY [3] geschaffen, und aus uerer Zeit liegen zwei leicht faßliche Darstellungen vor, nämlich: Die moderne gebra von Herrn VAN DER WAERDEN [12] und mein Algebrabuch [6], in dem ı Wert darauf legte, auch die kleinsten Details lückenlos auszuarbeiten.

Die Geometer gehen aber an dieser Fundamentierung vorbei, vielleicht, il sie, wie gesagt, noch nicht erschöpfend ist, aber auch weil man glaubt, e Sache mit einfacheren Mitteln und zugleich vollständiger machen zu können. doch dürfte das eine Verkennung der Schwierigkeiten sein. Was die Algebra ch nicht hat leisten können, ist insbesondere die Schaffung eines brauch- ren Vielfachheitsbegriffes für eine nicht isolierte Lösung eines Systems von oder mehr homogenen Gleichungen mit $k+1$ Unbekannten. Soweit der elfachheitsbegriff nur dazu dienen soll, dem Prinzip der Erhaltung der ızahl Geltung zu verschaffen, kommen allerdings nur Systeme mit endlich elen, also lauter isolierten Lösungen in Frage, und da hat die Algebra, nigstens für k Gleichungen, alles gemacht. Aber an sich ist ein Vielfach- itsbegriff wohl auch aus anderen Gründen wünschenswert, und da kann als Mangel empfunden werden, daß man ihn insbesondere in dem an- gebenen Fall noch nicht hat. In einer soeben erschienenen Arbeit [11] hat n Herr SEVERI den interessanten Versuch gemacht, einen ganz allgemein ltigen Vielfachheitsbegriff zu schaffen, und hat hinzugefügt, daß er diesen ıon seit 40 Jahren in all seinen Arbeiten immer berücksichtigt hätte. Un- ttelbar veranlaßt ist die SEVERIsche Arbeit durch meine Note [7] und weiter einflußt auch durch meine Note [8], da ich in beiden die Vielfachheit nicht rücksichtigt habe; es sieht daher fast so aus, als wäre ich der erste, der esen Begriff nicht kennt. Leider ist aber Herrn SEVERIS Versuch mißglückt, d sein Vielfachheitsbegriff ist wohl von niemand berücksichtigt worden; nn ich werde im folgenden zeigen, daß das von Herrn SEVERI angegebene f der KRONECKERschen Eliminationsmethode beruhende Rezept zur Be- mmung der Vielfachheit schon im Fall endlich vieler Lösungen nicht brauch- r ist, indem es mit dem BÉZOUTschen Satz im Widerspruch steht. Das gibt nn naturgemäß Veranlassung, auch auf den SEVERIschen Beweis des ÉZOUTschen Satzes einzugehen.

Für den speziellen Fall von drei Flächen des R_3, die sich in einer Kurve ıneiden, gibt Herr SEVERI noch eine zweite Vielfachheitsdefinition, ohne prüfen, ob sie mit der ersten in Übereinstimmung ist. Ich werde zeigen, ß sie es nicht ist und daß sie außerdem keinesfalls das leistet, was die gebraische Geometrie vermutlich erwartet, indem sie z. B. bei Berührung r Flächen längs der Kurve nur die Vielfachheit 1 gibt.

Um Mißverständnissen vorzubeugen, soll aber gleich hier bemerkt werden daß es im folgenden gar nicht meine Absicht ist, algebraische *Geometrie* zu treiben, sondern daß ich nur die rein *algebraischen* Grundlagen erörtern will Ich werde also nicht oder höchstens nur ganz nebenbei von Schnittpunkte algebraischer Mannigfaltigkeiten reden, sondern genau wie in meinen Arbeite [7] und [8], die Herrn SEVERI auf den Plan gerufen haben, mich nur mit Gle chungssystemen und ihren Lösungen beschäftigen.

§ 2.

Nachweis, daß die Kroneckersche Eliminationsmethode zur Bestimmun einer Vielfachheit unbrauchbar ist.

Diese Methode der sukzessiven Elimination liefert bekanntlich die Ge samtheit der Lösungen eines beliebigen Gleichungssystems ohne Berück sichtigung einer Vielfachheit der einzelnen Lösungen. Herr SEVERI [11] be hauptet nun, die Methode liefere, „wenn sie aufmerksam angewandt würde" von selbst die den Lösungen zukommende Vielfachheit. Es soll nicht be stritten werden, daß dieses von Herrn SEVERI beschriebene und an Beispiele illustrierte Verfahren in vielen Fällen das liefert, was man rein gefühlsmäßi gern als die Vielfachheit einer Lösung ansprechen möchte. In anderen Fälle kann aber auch etwas herauskommen, was mit allgemein anerkannten Sätze im Widerspruch steht, und deshalb kann das Verfahren nicht als allgemei gültige Definition zugelassen werden. Betrachten wir z. B. das System

$$x_1^2 = 0, \quad x_2^2 = 0, \quad x_3^2 = 0$$

(geometrisch den Schnittpunkt von drei Doppelebenen im R_3). Das Syste hat natürlich nur die eine Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Da es aber aus dre Gleichungen zweiten Grades besteht, kommt der Lösung nach dem auch vo Herrn SEVERI als grundlegend angesehenen BÉZOUTschen Satz die Vielfach heit 8 zu. Durch Anwendung der SEVERI-KRONECKERschen Methode komm aber, wie wir sehen werden, die Vielfachheit 16 heraus. In der Tat, wenn w zunächst einmal annehmen, daß eine dem eigentlichen Eliminationsproze vorausgehende allgemeine Koordinatentransformation hier nicht erforderlic ist[1]), gestaltet sich die Rechnung folgendermaßen:

Von den Polynomen mit unbestimmten Koeffizienten ξ_ν, η_ν

$$\xi_1 x_1^2 + \xi_2 x_2^2 + \xi_3 x_3^2, \quad \eta_1 x_1^2 + \eta_2 x_2^2 + \eta_3 x_3^2$$

[1]) Wann sie erforderlich ist und wann nicht, ist mir nicht ganz klar geworde In den Beispielen bei SEVERI wird die Transformation nie ausgeübt.

die Resultante nach x_1 zu bilden; sie ist[2])

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & 0 & \xi_2 x_2^2 + \xi_3 x_3^2 & 0 \\ 0 & \xi_1 & 0 & \xi_2 x_2^2 + \xi_3 x_3^2 \\ \eta_1 & 0 & \eta_2 x_2^2 + \eta_3 x_3^2 & 0 \\ 0 & \eta_1 & 0 & \eta_2 x_2^2 + \eta_3 x_3^2 \end{vmatrix}$$

$$[\xi_1(\eta_2 x_2^2 + \eta_3 x_3^2) - \eta_1(\xi_2 x_2^2 + \xi_3 x_3^2)]^2$$

$$(\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2)^2 x_2^4 + 2(\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2)(\xi_1\eta_3 - \eta_1\xi_3) x_2^2 x_3^2 + (\xi_1\eta_3 - \eta_1\xi_3)^2 x_3^4.$$

so ist jetzt noch das System

$$x_2^4 = 0, \quad x_2^2 x_3^2 = 0, \quad x_3^4 = 0$$

behandeln. Da die linken Seiten keinen nichtkonstanten gemeinsamen ler haben, muß jetzt entsprechend die Resultante der Polynome

$$\xi_1 x_2^4 + \xi_2 x_2^2 x_3^2 + \xi_3 x_3^4, \quad \eta_1 x_2^4 + \eta_2 x_2^2 x_3^2 + \eta_3 x_3^4$$

ch x_2 gebildet werden. Sie ist eine achtreihige Determinante, die man ht berechnen kann. Aber auch ohne Rechnung weiß man, daß sie isobar n Gewicht 16 ist[3]), so daß jedes Glied den Faktor x_3^{16} hat. Daher handelt sich jetzt noch um die eine Gleichung $x_3^{16} = 0$; sie hat die 16fach zählende sung $x_3 = 0$. Ihre Ergänzung zu der Lösung des ursprünglichen Systems $x_3 = x_2 = x_1 = 0$, und dieser muß daher nach Herrn Severi ebenfalls Vielfachheit 16 zuerkannt werden statt 8, wie es der Bézoutsche Satz rlangt.

Aber auch wenn eine vorausgehende allgemeine[4]) (projektive) Koordientransformation erforderlich sein sollte, wird die Rechnung nur etwas

---

[2]) Ich nehme dabei an, daß unter der Resultante von zwei Polynomen nach einer iablen, wie allgemein üblich, die Sylvesterssche Determinante zu verstehen ist. Severi [9], S. 335 findet sich allerdings die folgende Definition: Die zwei Polynome

$$f_0(x_1, \ldots, x_r), \quad f_1(x_1, \ldots, x_r)$$

den in bezug auf x_1 positiven Graden n_0 und n_1 seien relativ prim und keines e einen von x_1 freien nichtkonstanten Teiler. Dann gibt es ein bis auf einen konten Faktor eindeutig bestimmtes Polynom $R(x_2, \ldots, x_r)$, das sich in der Gestalt $+ Bf_1$ darstellen läßt, wo A und B Polynome von $x_1, \ldots, x_r$ sind, und zwar in ug auf x_1 höchstens vom Grad $n_1 - 1$ bzw. $n_0 - 1$. R heißt die Resultante von f_1 nach x_1. Daß diese Definition mißglückt ist, indem die darin enthaltene Beptung nicht zutrifft, zeigt das Beispiel $f_0 = x_1^2 + x_2$, $f_1 = x_1^2 + x_3$. Hier sind alle aussetzungen erfüllt; aber die von R geforderten Eigenschaften kommen jedem ynom der Form

$$\Phi(x_2, x_3) \cdot (x_2 - x_3) = \Phi(x_2, x_3) \cdot f_0 - \Phi(x_2, x_3) \cdot f_1$$

Also ist R nicht bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt, und die ultante ist nicht definiert. Die wahre Resultante ist aber natürlich die Sylvester-e Determinante, die hier gleich $(x_2 - x_3)^2$ ist.

[3]) Siehe z. B. [6], S. 207.

[4]) Zu diesem Begriff vgl. die Fußnote [10]).

umständlicher, ohne ein anderes Resultat zu liefern. Dann handelt es sic
nämlich um das System

$$(\sum_{\nu=1}^{4} a_{1\nu}x_\nu)^2 = 0, \qquad (\sum_{\nu=1}^{4} a_{2\nu}x_\nu)^2 = 0, \qquad (\sum_{\nu=1}^{4} a_{3\nu}x_\nu)^2 = 0,$$

wobei man, indem man diese Gleichungen durch die allgemeinen[4]), also von
verschiedenen Größen a_{11}, a_{21}, a_{31} dividiert, einfach $a_{11} = a_{21} = a_{31} =$
annehmen darf. Setzt man dann zur Abkürzung

$$\sum_{\nu=2}^{4} a_{\lambda\nu}x_\nu = \varphi_\lambda, \qquad (\lambda = 1, 2, 3$$

so daß das Gleichungssystem übergeht in

$$(x_1 + \varphi_1)^2 = 0, \quad (x_1 + \varphi_2)^2 = 0, \quad (x_1 + \varphi_3)^2 = 0,$$

so muß zunächst von den Polynomen

$$\xi_1(x_1 + \varphi_1)^2 + \xi_2(x_1 + \varphi_2)^2 + \xi_3(x_1 + \varphi_3)^2,$$
$$\eta_1(x_1 + \varphi_1)^2 + \eta_2(x_1 + \varphi_2)^2 + \eta_3(x_1 + \varphi_3)^2$$

die Resultante nach x_1 gebildet werden; diese ist

$$\begin{vmatrix} \Sigma\xi_\lambda & 2\Sigma\xi_\lambda\varphi_\lambda & \Sigma\xi_\lambda\varphi_\lambda^2 & 0 \\ 0 & \Sigma\xi_\lambda & 2\Sigma\xi_\lambda\varphi_\lambda & \Sigma\xi_\lambda\varphi_\lambda^2 \\ \Sigma\eta_\lambda & 2\Sigma\eta_\lambda\varphi_\lambda & \Sigma\eta_\lambda\varphi_\lambda^2 & 0 \\ 0 & \Sigma\eta_\lambda & 2\Sigma\eta_\lambda\varphi_\lambda & \Sigma\eta_\lambda\varphi_\lambda^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \Sigma\xi_\lambda & \Sigma\xi_\lambda\varphi_\lambda^2 \\ \Sigma\eta_\lambda & \Sigma\eta_\lambda\varphi_\lambda^2 \end{vmatrix}^2 - 4 \begin{vmatrix} \Sigma\xi_\lambda & \Sigma\xi_\lambda\varphi_\lambda \\ \Sigma\eta_\lambda & \Sigma\eta_\lambda\varphi_\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Sigma\xi_\lambda\varphi_\lambda & \Sigma\xi_\lambda\varphi_\lambda^2 \\ \Sigma\eta_\lambda\varphi_\lambda & \Sigma\eta_\lambda\varphi_\lambda^2 \end{vmatrix}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\xi_\lambda\eta_\mu - \eta_\lambda\xi_\mu = \tau_{\lambda\mu} \qquad (1 \leqq \lambda < \mu \leqq 3$$

so nimmt sie nach leichter Ausrechnung die folgende Gestalt an:

$$\tau_{12}^2(\varphi_2 - \varphi_1)^4 + 2\,\tau_{12}\tau_{13}(\varphi_2 - \varphi_1)^2(\varphi_3 - \varphi_1)^2 + \tau_{13}^2(\varphi_3 - \varphi_1)^4 -$$
$$- 2\,\tau_{12}\tau_{23}(\varphi_2 - \varphi_1)^2(\varphi_3 - \varphi_2)^2 + 2\,\tau_{13}\tau_{23}(\varphi_3 - \varphi_1)^2(\varphi_3 - \varphi_2)^2 +$$
$$+ \tau_{23}^2(\varphi_3 - \varphi_2)^4.$$

Daher ist jetzt das folgende Gleichungssystem zu lösen:

$$(\varphi_2 - \varphi_1)^4 = 0, \quad (\varphi_2 - \varphi_1)^2(\varphi_3 - \varphi_1)^2 = 0, \quad (\varphi_3 - \varphi_1)^4 = 0,$$
$$(\varphi_2 - \varphi_1)^2(\varphi_3 - \varphi_2)^2 = 0, \quad (\varphi_3 - \varphi_1)^2(\varphi_3 - \varphi_2)^2 = 0, \quad (\varphi_3 - \varphi_2)^4 = 0.$$

Nun sind von den drei Differenzen $\varphi_2 - \varphi_1$, $\varphi_3 - \varphi_1$, $\varphi_3 - \varphi_2$ die erste
beiden zwei allgemeine Linearformen von x_2, x_3, x_4, die wir mit χ_1, χ_2 b
zeichnen wollen; die dritte ist dann gleich $\chi_2 - \chi_1$. Das Gleichungssyste
ist also das folgende:

$$\chi_1^4 = 0,\ \chi_1^2\chi_2^2 = 0, \chi_2^4 = 0,\ \chi_1^2(\chi_2 - \chi_1)^2 = 0, \chi_2^2(\chi_2 - \chi_1)^2 = 0,\ (\chi_2 - \chi_1)^4 =$$

r, was augenscheinlich dasselbe ist, da beim weiteren Eliminationsprozeß doch wieder allgemeine Linearkombinationen zu bilden sind:

$$\chi_1^4 = 0, \quad \chi_1^3\chi_2 = 0, \quad \chi_1^2\chi_2^2 = 0, \quad \chi_1\chi_2^3 = 0, \quad \chi_2^4 = 0.$$

r darf man, indem man χ_1 und χ_2 durch den Koeffizienten von x_2, der ja emein, also von 0 verschieden ist, dividiert, diesen zu 1 machen. Setzt n demgemäß

$$\chi_1 = x_2 + \psi_1, \quad \chi_2 = x_2 + \psi_2,$$

sind ψ_1, ψ_2 Linearformen von x_3, x_4, und es muß jetzt die Resultante Polynome

$$\sum_{\lambda=1}^{5} \xi_\lambda (x_2 + \psi_1)^{5-\lambda}(x_2 + \psi_2)^{\lambda-1}, \quad \sum_{\lambda=1}^{5} \eta_\lambda (x_2 + \psi_1)^{5-\lambda}(x_2 + \psi_2)^{\lambda-1}$$

n x_2 gebildet werden. Unter Benutzung der Formel[5])

$$\operatorname{Res}\big(f(x), g(x)\big) = \operatorname{Res}\big(f(x - \psi), g(x - \psi)\big)$$

das auch die Resultante der Polynome

$$\sum_{\lambda=1}^{5} \xi_\lambda x_2^{5-\lambda}(x_2 + \psi_2 - \psi_1)^{\lambda-1}, \quad \sum_{\lambda=1}^{5} \eta_\lambda x_2^{5-\lambda}(x_2 + \psi_2 - \psi_1)^{\lambda-1},$$

, wenn $\psi_2 - \psi_1 = \omega$ gesetzt wird, die achtreihige Sylvesterssche Determ ante

$$\begin{vmatrix} \xi_\lambda & \Sigma\xi_\lambda\binom{\lambda-1}{1}\omega & \Sigma\xi_\lambda\binom{\lambda-1}{2}\omega^2 & \Sigma\xi_\lambda\binom{\lambda-1}{3}\omega^3 & \Sigma\xi_\lambda\binom{\lambda-1}{4}\omega^4 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \eta_\lambda & \Sigma\eta_\lambda\binom{\lambda-1}{1}\omega & \Sigma\eta_\lambda\binom{\lambda-1}{2}\omega^2 & \Sigma\eta_\lambda\binom{\lambda-1}{3}\omega^3 & \Sigma\eta_\lambda\binom{\lambda-1}{4}\omega^4 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix},$$

die nicht hingeschriebenen 3 + 3 Zeilen in bekannter Weise durch zyklische chiebung nach rechts entstehen. Diese enthält nach dem bekannten Satz das Gewicht einer Resultante[6]) den Faktor ω^{16}. Dabei ist ω eine Linear- n von x_3, x_4, etwa $\omega = c_3x_3 + c_4x_4$. Es ist also noch die Gleichung

$$(c_3x_3 + c_4x_4)^{16} = 0$$

ösen, die wieder eine 16fache Wurzel hat statt einer 8fachen.

Als Anwendung seiner unmöglichen Vielfachheitsdefinition beantwortet Severi die Frage, wann ein System $f_\nu(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ eine irreduzible ve *einfach gezählt* vorstellt, folgendermaßen (S. 104): „Zunächst ist dafür endig, daß die Polynome f_ν keinen gemeinsamen Teiler besitzen, und dann gt dafür (und ist auch notwendig, falls die Gleichungen vorher einer all- einen Koordinatentransformation unterworfen wurden), daß die Polynome

[5]) Siehe z. B. [6], Satz 134 (S. 258).
[6]) Siehe z. B. [6], S. 207.

in x_2 und x_3[7]), aus welchen das *erste System von Eliminationsgleichung* besteht, als größten gemeinsamen Teiler ein irreduzibles Polynom (nicht etw eine höhere Potenz desselben) besitzen, und endlich, daß die Polynome in x_3 welche das *zweite System von Eliminationsgleichungen* bilden, keine gemei samen Wurzeln *auf*weisen."

Dieser *Spezialfall* der SEVERIschen Definition kann natürlich mit dem a einen ganz anderen Spezialfall sich beziehenden BÉZOUTschen Satz nicht i Widerspruch stehen und auch sonst keiner früher gegebenen Definition wide sprechen, weil eben für diesen Spezialfall noch nie eine gegeben worden is Insofern kann daher kein Einwand gegen diese spezielle Definition erhob werden; aber sie ist dann eben jetzt zum ersten Male gegeben worden u konnte früher noch von niemand berücksichtigt werden, so daß auch geg niemand ein Vorwurf wegen Nichtberücksichtigung erhoben werden kan Allerdings muß nach der vorausgehenden Erfahrung stark bezweifelt werde ob die Definition zweckmäßig ist und ob man viel mit ihr anfangen kan

Anmerkung bei der Korrektur: Mein Zweifel an der Zweckmäßi keit ist inzwischen durch die völlige Überzeugung von der Unzweckmäßigke abgelöst worden, nachdem Herr VAN DER WAERDEN bemerkt hat, daß es irred zible Kurven gibt, die nach dieser Definition sich überhaupt nicht „einfa gezählt" darstellen lassen, wieviele Gleichungen man auch nehmen mag[8]

§ 3.

Bemerkungen zu einem Beweis des Bézoutschen Satzes.

Folgendes ist bekannt und kann z. B. in meiner Algebra [6], § 57 nac gelesen werden: Wenn die

$$f_\nu(x_1, \ldots, x_{k+1}) \qquad (\nu = 1, \ldots, \tag{1}$$

k homogene Polynome von $k+1$ Variabeln sind, und zwar f_ν vom Grad >0), so ist die MERTENSsche Resultante

$$R = R\begin{pmatrix} f_1, f_2, \ldots, f_k, & u_1 x_1 + \ldots + u_{k+1} x_{k+1} \\ x_1, x_2, \ldots, x_k, & x_{k+1} \end{pmatrix} \tag{2}$$

als Polynom der Unbestimmten $u_1, \ldots, u_{k+1}$ entweder identisch 0 oder s zerfällt in ein Produkt von $l = n_1 \ldots n_k$ Linearfaktoren:

$$R = \prod_{\lambda=1}^{l} (\xi_{1\lambda} u_1 + \xi_{2\lambda} u_2 + \cdots + \xi_{k+1,\lambda} u_{k+1}). \tag{3}$$

Im ersten Fall hat das Gleichungssystem

$$f_1 = 0, \ldots, f_k = 0 \tag{4}$$

---

[7]) Herr SEVERI rechnet hier inhomogen und setzt $x_4 = 1$.

[8]) Vgl. den Nachtrag am Schluß dieser Arbeit.

nendlich viele Lösungen; im zweiten Fall hat es nur endlich viele Lösungen, ämlich die l Lösungen

$$x_1 = \xi_{1\lambda},\ x_2 = \xi_{2\lambda},\ \ldots,\ x_{k+1} = \xi_{k+1,\lambda}$$

nd keine anderen[9]). Diese l Lösungen sind im allgemeinen alle voneinander erschieden. In Spezialfällen können aber auch gleiche dabei sein, und wenn ine Lösung etwa p-mal unter den l angegebenen vorkommt, so schreibt man ır die Vielfachheit p zu.

In diesem sehr einfachen und klaren Tatbestand ist der Bézoutsche Satz nthalten und auch eine Definition der Vielfachheit für den Fall, daß ein ystem von k homogenen Gleichungen mit $k+1$ Unbekannten nur endlich iele Lösungen hat. Die Verwendung der Mertensschen Resultante ist hier as naturgemäß Gegebene, und der daraus entspringende Vielfachheitsbegriff t eine einfache Verallgemeinerung dessen, was man im Fall *einer* Gleichung $k = 1$) von jeher als Vielfachheit bezeichnet hat (vgl. [6], S. 292). In seinem uch [9] versucht nun Herr Severi ohne die Mertenssche Resultante auszuommen und den Bézoutschen Satz einfach *aus der Kroneckerschen Eliminationstheorie* zu gewinnen. Das ist nun nach den Ausführungen des vorigen aragraphen ganz unmöglich. Der Versuch ist aber auch insofern mißglückt, ls dabei einige nicht ausgesprochene Hilfssätze als selbstverständlich anenommen werden, die teils falsch, teils richtig sind, im letzteren Fall aber um Teil nicht oder wenigstens nicht leicht ohne die Mertenssche Resultante ch beweisen lassen, so daß man mit dem gleichen Kraftaufwand eigentlich hon bis zum Bézoutschen Satz selbst vordringen kann.

Herr Severi behandelt das allgemeine[10]) *inhomogene* System, setzt also $_{k+1} = 1$, und beginnt dann auf S. 408 damit, daß er die Polynome f_ν zu rodukten von Linearfaktoren mit allgemeinen[10]) Koeffizienten spezialisiert. eil *nach* dieser Spezialisierung, wie ohne weiteres zu sehen, nur endlich iele, nämlich gerade l verschiedene Lösungen vorhanden sind, so wird gehlossen, daß es *vor* der Spezialisierung ebenfalls nur endlich viele Lösungen eben kann. Es ist nicht recht ersichtlich, auf welchem irgendwo bewiesenen atz dieser Schluß beruht. Der Satz muß wohl folgendes besagen: *Wenn die oeffizienten eines Gleichungssystems Polynome von Unbestimmten sind und enn das System unendlich viele Lösungen hat, dann hat jedes System, das aus m gegebenen durch irgendwelche Spezialisierung der Unbestimmten entsteht,*

[9]) Proportionale Lösungen gelten natürlich als dieselbe: die triviale Lösung $= x_2 = \cdots = x_{k+1} = 0$ zählt nicht mit.

[10]) generico. Die in [9], S. 329ff. und 403 gegebene Definition dieses Begriffes heint mir etwas verschwommen. Erreicht werden soll damit natürlich dasselbe, was an heute in der Algebra dadurch zu erreichen pflegt, daß man *Unbestimmte* als Koeffienten nimmt.

ebenfalls unendlich viele Lösungen. Leider ist er falsch, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$a x_1^2 x_2 - b x_1 = 0, \quad a x_1 x_2^2 - b x_2 = 0.$$

Solange a eine Unbestimmte ist, gibt es unendlich viele Lösungen, nämlich

$$x_1 = \text{beliebig} \neq 0, \quad x_2 = \frac{b}{a x_1};$$

wenn aber a zu 0 spezialisiert wird, gibt es nur *eine* Lösung: $x_1 = x_2 = 0$. Das System dieses Beispiels ist inhomogen. Da es aber zweckmäßig ist, beim Bézoutschen Satz homogene Gleichungen zu betrachten, so fragt es sich, ob der falsche Satz bei Beschränkung auf homogene Gleichungen vielleicht richtig wird. Das trifft nun tatsächlich zu, ist aber nicht selbstverständlich, sondern bedarf eines Beweises. Er kann in dem hier benötigten Fall, daß die Anzahl der Gleichungen um 1 kleiner ist als die der Unbekannten, mit Benutzung der Mertensschen Resultante folgendermaßen geführt werden:

Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das System (4) unendlich viele Lösungen hat, besteht nach dem zu Beginn dieses Paragraphen erwähnten Satz darin, daß die Resultante (2) als Polynom der Unbestimmten u_ν identisch verschwindet[11]). Diese Bedingung besagt, daß die Koeffizienten der f_ν einem System von Bedingungsgleichungen genügen müssen[12]). Tun sie das aber, solange sie Polynome von Unbestimmten sind, so tun sie es auch, wenn diese Unbestimmten irgendwie spezialisiert werden, so daß die Bedingung, die auch hinreichend ist, auch nach der Spezialisierung erfüllt bleibt.

Nun geht der Beweis bei Severi folgendermaßen weiter: Da nach der Spezialisierung genau l verschiedene Lösungen vorhanden sind, die in einem nicht weiter erklärten Sinne als „einfach" angesehen werden, so ist das Schlußpolynom $R(x_k)$[13]), das sich ergibt, nachdem man im spezialisierten System nach der Kroneckerschen Methode die Unbekannten $x_1, \ldots, x_{k-1}$ sukzessive eliminiert hat, genau vom Grad l. Dieser Schluß ist aber nicht zwingend; es wäre sehr wohl denkbar, daß $R(x_k)$ von höherem Grad ist und daß das Verfahren die „einfachen" Lösungen in zu hoher Vielfachheit liefert, genau wie es im vorigen Paragraphen die achtfache Lösung 16fach lieferte. Aber ich habe mich durch vollständige Durchführung der Rechnung davon überzeugt, daß dieser Übelstand hier nicht eintritt und daß $R(x_k)$ wirklich vom Grad

[11]) Dieselben Dienste würde auch die folgende Resultante leisten:

$$R\begin{pmatrix} f_1^*, \ldots, f_k^* \\ x_1, \ldots, x_k \end{pmatrix}, \text{ wobei } f_\nu^* = f_\nu(x_1, \ldots, x_k, u_1 x_1 + \cdots + u_k x_k).$$

[12]) Ist die Anzahl der Gleichungen nicht gleich k, ein Fall, der hier allerdings nicht benötigt wird, so gilt ein analoger Satz, wie der Vollständigkeit halber im letzten Paragraphen dieser Arbeit noch bewiesen werden soll.

[13]) Eigentlich $R(x_k, x_{k+1})$. Aber Herr Severi rechnet ja inhomogen ($x_{k+1} = 1$).

. Die Rechnung ist in formaler Hinsicht sehr mühsam und mag hier unter-
iben, doch ist ohne sie natürlich wieder eine Lücke im Beweis des Bézout-
nen Satzes. Eine weitere Lücke steckt in der folgenden Fortsetzung des
weises: Weil das im *Spezialfall* erhaltene Schlußpolynom $R(x_k)$ vom Grad l
, so ist das im *allgemeinen Fall* sich ergebende Schlußpolynom ebenfalls
m Grad l. Hier wird also einfach das Prinzip der Erhaltung der Anzahl
ne ein Wort der Rechtfertigung angewandt, was mir höchst bedenklich
neint. Die Eliminationsprozesse im allgemeinen und im spezialisierten Fall
auchen sich durchaus nicht Schritt für Schritt zu entsprechen, und selbst
nn sie es bis zum Schluß tun, wäre es immer noch möglich, daß das Schluß-
lynom, welches ja als der größte gemeinsame Teiler vieler Polynome definiert
, zwar *nach* der Spezialisierung vom Grad l, *vor* der Spezialisierung aber von
ringerem Grad ist, genau wie z. B. der größte gemeinsame Teiler der beiden
lynome $x_1^2 - a x_1 x_2$ und $x_1^2 - b x_1 x_2$ *nach* der Spezialisierung $a = b$ vom
ad 2, *vor* der Spezialisierung aber nur vom Grad 1 ist. Die Anwendung
s Prinzips der Erhaltung der Anzahl dürfte sich hier *vielleicht* rechtfertigen
ssen durch Überlegungen, wie sie Herr van der Waerden an vielen Stellen
gestellt und auf seinen Begriff der relationstreuen Spezialisierung gegründet
t[14]), wobei man aber auch nicht ohne wesentlich tiefer liegende Hilfsmittel
skommt, als Herr Severi sie anwenden will.

Wenn nun all diese Lücken geschlossen sind, hat man den Bézoutschen
tz für den allgemeinen Fall, d. h. mit Unbestimmten als Koeffizienten. Ob
an daraus den Satz für spezialisierte Systeme einfach durch die Feststellung
winnen kann, daß „eine μ-fache Wurzel eines spezialisierten Polynoms
(x_k) als Grenzwert von μ einfachen Wurzeln des nicht spezialisierten $R(x_k)$
tsteht und daß $x_1, \ldots, x_{k-1}$ rationale Funktionen von x_k sind", scheint
r sehr zweifelhaft. Es könnten ja beispielsweise, um nur einen der möglichen
nwände zu erwähnen, die Koeffizienten dieser rationalen Funktionen im
hler und Nenner nach der Spezialisierung sämtlich verschwinden. Vor allem
er müßte überhaupt erst eine klare Vielfachheitsdefinition gegeben werden.

§ 4.

Eine andere Vielfachheitsdefinition.

Bei Severi [11] findet sich in Nr. 10 für den Fall $k = 3$ noch eine zweite
elfachheitsdefinition: *Die Flächen $f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = 0$ von den Ordnungen
n_1, n_2, n_3 besitzen in P die Schnittmultiplizität i, wenn von den $l = n_1 n_2 n_3$
rennten Schnittpunkten allgemeiner „benachbarter" Flächen derselben Ord-
ngen $F_1 = 0, F_2 = 0, F_3 = 0$ bei Konvergenz $F_\nu \to f_\nu$ immer mindestens i*

[14]) Vgl. insbesondere [13], Kap. 6.

(oder überhaupt keine) nach P streben. Vorher spricht Herr Severi allerding davon, daß die drei Flächen eine Kurve gemein haben sollen und daß d Punkt P auf dieser Kurve liegen soll. Bei der Formulierung der Definitic ist aber diese Einschränkung nicht wiederholt, was ich begrüße, weil im Fa nur endlich vieler Schnittpunkte diese Definition und ebenso ihre naturgemäß Ausdehnung aufs mehrdimensionale Gebiet im Gegensatz zur früheren wirklic die richtige durch den Bézoutschen Satz geforderte Vielfachheit liefert. Da soll im gegenwärtigen Paragraphen gezeigt werden, während der nächste d unliebsamen Überraschungen bringen wird, die sich ergeben, wenn die Fläche eine Kurve gemein haben.

Herr Severi fährt folgendermaßen fort: *Man sagt nun, die drei Flächer die eine irreduzible Kurve gemeinsam haben, schneiden sich längs dieser Kur einfach, wenn sie in jedem Punkt der Kurve die Schnittmultiplizität* 1 *haben* Mir persönlich scheint es ja ein bißchen obstinat, wenn man hier nicht wenig stens endlich viele Ausnahmepunkte zulassen und daher, falls eine Kurv vielleicht nur einen einzigen zweifach zählenden und sonst lauter einfac zählende Punkte hat, gleich die ganze Kurve zweifach zählen will; abe immerhin, das ist Geschmacksache, logisch ist nichts einzuwenden.

Es soll jetzt zunächst die Ausdehnung der Definition aufs mehrdimen sionale Gebiet gebracht werden. *Sei*

$$f_\nu(x_1, \ldots, x_{k+1}) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, \tag{1}$$

ein homogenes Gleichungssystem mit komplexen Zahlen als Koeffizienten un sei f_ν *vom Grad* $n_\nu (> 0)$. *Ferner sei*

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k+1} \tag{2}$$

eine aus komplexen Zahlen bestehende Lösung[15]. *Dann werden wir beweisen daß man in mannigfacher Weise die Koeffizienten eines „benachbarten" hom genen Systems*

$$F_\nu(x_1, \ldots, x_{k+1}) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, \tag{3}$$

derart gegen die Koeffizienten des Systems (1) *konvergieren lassen kann*[16], *da das System* (3) *dauernd* l *verschiedene Lösungen hat, wo* $l = n_1 n_2 \ldots n_k$ *is und daß eine von ihnen gegen die Lösung* (2) *des Systems* (1) *konvergiert. I dann* p *die größte Zahl derart, daß bei jedem solchen Grenzprozeß immer wenigsten* p *Lösungen gegen* (2) *konvergieren, so daß bei einem geeigneten Grenzproze*

[15]) Bei unendlich vielen Lösungen gibt es stets auch solche, die noch der Gleichur $\Sigma u_\nu x_\nu = 0$, wo die u_ν Unbestimmte sind, genügen und daher keine komplexen Zahle sind; solche Lösungen müssen von der gegenwärtigen Betrachtung natürlich au geschlossen werden.

[16]) Wegen der Homogenität ist F_ν natürlich von selbst vom gleichen Grad wie f sonst hätte der Grenzübergang keinen Sinn.

ch nur p Lösungen das tun, so wird der Lösung (2) *die Vielfachheit p geschrieben.*

Wir zeigen jetzt, daß es benachbarte Polynome F_ν von der verlangten t stets gibt, so daß die Definition nie versagt. Zu dem Zweck betrachten ir die k Produkte

$$\Phi_\nu(x_1, \ldots, x_{k+1}) = \prod_{\lambda=1}^{n_\nu} (a_{\nu 1 \lambda} x_1 + a_{\nu 2 \lambda} x_2 + \cdots + a_{\nu, k+1, \lambda} x_{k+1}) \qquad (\nu = 1, \ldots, k).$$

abei seien die $a_{\nu \mu \lambda}$ komplexe Zahlen, die der Bedingung

$$a_{\nu 1 1} \xi_1 + a_{\nu 2 1} \xi_2 + \cdots + a_{\nu, k+1, 1} \xi_{k+1} = 0$$

nügen und im übrigen so beschaffen sind, daß das System

$$\Phi_\nu(x_1, \ldots, x_{k+1}) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, k)$$

verschiedene Lösungen hat (die man erhält, indem man aus jedem Produkt nen Faktor gleich 0 setzt). Für die Verschiedenheit der l Lösungen ist nur tig, daß gewisse Determinantenrelationen zwischen den $a_{\nu \mu \lambda}$, die auch ter Berücksichtigung von (5) keine Identitäten sind, *nicht* bestehen; die edingung ist also stets erfüllbar. Unter den l Lösungen von (6) ist wegen (5) türlich auch die Lösung (2) vorhanden.

Nach dem Satz zu Beginn des § 3 ist die Resultante

$$R\begin{pmatrix} \Phi_1, \ldots, \Phi_k, u_1 x_1 + \cdots + u_{k+1} x_{k+1} \\ x_1, \ldots, x_k, \qquad x_{k+1} \end{pmatrix}$$

cht identisch 0. Daher ist auch die Resultante

$$R\begin{pmatrix} f_1 + \varepsilon \Phi_1, \ldots, f_k + \varepsilon \Phi_k, u_1 x_1 + \cdots + u_{k+1} x_{k+1} \\ x_1, \ldots, x_k, \qquad x_{k+1} \end{pmatrix},$$

e ein Polynom von ε ist, bei dem die höchste Potenz von ε die Resultante (7) m Koeffizienten hat, höchstens für endlich viele Werte von ε identisch 0. eim Grenzprozeß $\varepsilon \to 0$ bleibt daher (8) dauernd von 0 verschieden. Ferner die Diskriminante

$$\mathrm{Discr}\,(\Phi_1, \ldots, \Phi_k),$$

eil die l Lösungen von (6) alle voneinander verschieden sind, von 0 verhieden[17]), und folglich ist auch die Diskriminante

$$\mathrm{Discr}\,(f_1 + \varepsilon \Phi_1, \ldots, f_k + \varepsilon \Phi_k),$$

e ein Polynom von ε ist, bei dem die höchste Potenz von ε die Diskriminante (9) zum Koeffizienten hat, für $\varepsilon \to 0$ dauernd von 0 verschieden. omit hat das System

$$f_\nu + \varepsilon \Phi_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, k)$$

[17]) Die Definition und die hier gebrauchte Eigenschaft der Diskriminante findet n bei KÖNIG [2], S. 323 und 338.

für $\varepsilon \to 0$ genau die von dem System (3) verlangte Eigenschaft. Dabei ha sogar eine der Lösungen von (11) nicht nur die Eigenschaft, gegen die Lösung (2 des Systems (1) zu konvergieren, sondern sie ist während des ganzen Grenz prozesses genau gleich der Lösung (2).

Nun nehmen wir an, daß das System (1) nur endlich viele Lösungen ha und daß die Lösung (2) nach der üblichen zu Beginn des § 3 gegebenen De finition etwa p-fach ist. Wir wollen zeigen, daß ihr dann nach der neuen Definition ebenfalls die Vielfachheit p zukommt. Nach dem Satz zu Begin des § 3 ist jetzt

$$(12)\quad R\begin{pmatrix} f_1, \ldots, f_k, & u_1 x_1 + \cdots + u_{k+1} x_{k+1} \\ x_1, \ldots, x_k, & x_{k+1} \end{pmatrix} = \prod_{\lambda=1}^{l} (\xi_{1\lambda} u_1 + \cdots + \xi_{k+1,\lambda} u_{k+1})$$

wobei von den l Lösungen

$$(13)\qquad \xi_{1\lambda}, \xi_{2\lambda}, \ldots, \xi_{k+1,\lambda} \qquad (\lambda = 1, \ldots, l)$$

etwa die p Lösungen

$$(14)\qquad \xi_{1\lambda}, \xi_{2\lambda}, \ldots, \xi_{k+1,\lambda} \qquad (\lambda = 1, \ldots, p)$$

mit der Lösung (2) übereinstimmen mögen. Eventuell durch lineare Trans formation der Unbekannten kann man erreichen, daß in jeder Lösung speziell $\xi_{k+1,\lambda} \neq 0$ ist. Wir denken das gemacht und dürfen dann $\xi_{k+1,\lambda} = 1$ setzen, wonach die Formel (12) übergeht in

$$(15)\quad R\begin{pmatrix} f_1, \ldots, f_k, & u_1 x_1 + \cdots + u_{k+1} x_{k+1} \\ x_1, \ldots, x_k, & x_{k+1} \end{pmatrix} = C \cdot \prod_{\lambda=1}^{l} (\xi_{1\lambda} u_1 + \cdots + \xi_{k\lambda} u_k + u_{k+1}),$$

wo C eine von 0 verschiedene Konstante ist. Die l Lösungen des Systems (3) seien

$$(16)\qquad \eta_{1\lambda}, \eta_{2\lambda}, \ldots, \eta_{k+1,\lambda} \qquad (\lambda = 1, \ldots, l)$$

Wenn wir zeigen können, daß von diesen bei jedem Grenzprozeß $F_\nu \to f$ bei geeigneter Wahl des in jeder Lösung steckenden willkürlichen Propor tionalitätsfaktors genau p gegen die Lösung (2) mit $\xi_{k+1} = 1$ konvergieren so wird die Übereinstimmung beider Definitionen bewiesen sein. Das wird gemacht sein, wenn wir sogar zeigen können, daß die l Lösungen (16) bei geeigneter Numerierung gegen die l Lösungen (13) mit $\xi_{k+1,\lambda} = 1$ konver gieren.

Nun ist analog zu (12)

$$(17)\quad R\begin{pmatrix} F_1, \ldots, F_k, & u_1 x_1 + \cdots + u_{k+1} x_{k+1} \\ x_1, \ldots, x_k, & x_{k+1} \end{pmatrix} = \prod_{\lambda=1}^{l} (\eta_{1\lambda} u_1 + \cdots + \eta_{k+1,\lambda} u_{k+1}),$$

d da bei dem auszuführenden Grenzprozeß die Koeffizienten von F_ν gegen von f_ν konvergieren, so folgt aus (15) und (17) die Beziehung

$$) \quad \lim \prod_{\lambda=1}^{l} (\eta_{1\lambda} u_1 + \ldots + \eta_{k+1,\lambda} u_{k+1}) = C \cdot \prod_{\lambda=1}^{l} (\xi_{1\lambda} u_1 + \ldots + \xi_{k\lambda} u_k + u_{k+1})$$

dem Sinne, daß die Koeffizienten des links stehenden Polynoms der u_ν gen die Koeffizienten des rechts stehenden Polynoms konvergieren.

Um hieraus folgern zu können, daß auch die $\eta_{\nu\lambda}$ gegen die $\xi_{\nu\lambda}$ konrgieren, schicken wir die Bemerkung voraus, daß man eine Matrix von mplexen (sogar ganzen rationalen) Zahlen mit k Spalten und unendlich len Zeilen

$$) \quad \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{Vmatrix}$$

angeben kann, daß alle Determinanten von 0 verschieden sind. In der Tat aucht man nur in die erste Zeile irgendwelche von 0 verschiedene Zahlen setzen. Alsdann kann man die Zahlen der zweiten Zeile der Reihe nach so hlen, daß die Determinanten der ersten zwei Zeilen sämtlich $\neq 0$ sind; n braucht ja nur bei jeder neu zu wählenden Zahl dafür zu sorgen, daß sie dlich vielen Gleichungen *nicht* genügt. Sodann kann man ähnlich die Zahlen r dritten Zeile der Reihe nach so wählen, daß die Determinanten der ersten ei Zeilen sämtlich $\neq 0$ sind usw. Dabei ist jede neu zu wählende Zahl immer r der Bedingung unterworfen, daß sie endlich vielen Gleichungen *nicht* nügt.

Nun ergibt sich aus (18) speziell

$$\lim \prod_{\lambda=1}^{l} \eta_{k+1,\lambda} = C.$$

her sind die $\eta_{k+1,\lambda}$ von 0 verschieden, so daß wir $\eta_{k+1,\lambda} = 1$ setzen rfen, wonach (18) übergeht in

$$) \quad \lim \prod_{\lambda=1}^{l} (\eta_{1\lambda} u_1 + \cdots + \eta_{k\lambda} u_k + u_{k+1}) = \prod_{\lambda=1}^{l} (\xi_{1\lambda} u_1 + \cdots + \xi_{k\lambda} u_k + u_{k+1}).$$

dieser Formel spezialisieren wir jetzt die Variabeln $u_1, \ldots, u_k$ zu den hlen der μ-ten Zeile der Matrix (19). Dadurch entsteht die Formel

$$\lim \prod_{\lambda=1}^{l} (\eta_{1\lambda} a_{\mu 1} + \cdots + \eta_{k\lambda} a_{\mu k} + u_{k+1}) = \prod_{\lambda=1}^{l} (\xi_{1\lambda} a_{\mu 1} + \cdots + \xi_{k\lambda} a_{\mu k} + u_{k+1}),$$

die so zu verstehen ist, daß die Koeffizienten des linksstehenden Polynoms von u_{k+1} gegen die Koeffizienten des rechtsstehenden Polynoms konvergieren. Da aber die Wurzeln eines Polynoms stetige Funktionen der Koeffizienten sind[18]), ist daraus zu schließen, daß die l Zahlen

$$\eta_{1\lambda}a_{\mu 1} + \cdots + \eta_{k\lambda}a_{\mu k}$$

in geeigneter Reihenfolge, die für jeden der unendlich vielen Werte μ separat festzulegen ist, gegen die l Zahlen

$$\xi_{1\lambda}a_{\mu 1} + \cdots + \xi_{k\lambda}a_{\mu k}$$

konvergieren. Da das für unendlich viele Werte μ gilt, kann man gewiß k Werte μ angeben, für welche die festzulegende Reihenfolge dieselbe ist, etwa für $\mu = \mu_1, \ldots, \mu_k$. Dann hat man

$$\lim (\eta_{1\lambda}a_{\mu 1} + \cdots + \eta_{k\lambda}a_{\mu k}) = \xi_{1\lambda}a_{\mu 1} + \cdots + \xi_{k\lambda}a_{\mu k}$$
$$\text{für } \mu = \mu_1, \ldots, \mu_k;\ \lambda = 1, \ldots, l.$$

Da aber die Determinante der $a_{\mu\nu}$ von 0 verschieden ist, folgt hieraus

$$\lim \eta_{\nu\lambda} = \xi_{\nu\lambda} \quad \text{für} \quad \nu = 1, \ldots, k;\ \lambda = 1, \ldots, l.$$

W. z. b. w.

§ 5.

Die zweite Vielfachheitsdefinition im Fall einer nicht isolierten Lösung.

Es soll jetzt die im vorigen Paragraphen besprochene Definition an einigen Beispielen von Gleichungssystemen mit unendlich vielen Lösungen erprobt werden. Geometrisch handelt es sich bei allen Beispielen um drei Flächen im Raum, die die Gerade $x_1 = x_2 = 0$ gemein haben, und zwar *berühren* sie sich entweder längs dieser Geraden oder die Gerade ist für wenigstens eine der Flächen *Doppellinie*. Man wird daher gewiß für alle Punkte dieser Geraden mindestens die Vielfachheit 2 wünschen; *trotzdem liefert aber die gegebene Definition immer nur die Vielfachheit* 1.

Erstes Beispiel.

$$x_1^2 - x_2x_3 = 0, \quad x_1^2 - 2\,x_2x_3 = 0, \quad x_1^2 - x_2x_4 = 0.$$

Gleichbedeutend mit diesem System (das nur der hübscheren geometrischen Deutung wegen in dieser Gestalt geschrieben wurde) ist natürlich das folgende

$$x_1^2 = 0, \quad x_2x_3 = 0, \quad x_2x_4 = 0.$$

---

[18]) Ein besonders durchsichtiger Beweis dafür findet sich bei SEVERI [9], S. 344–345.

Um die Lösung 0, 0, 1, 0 als einfach zu erkennen, betrachten wir das nachbarte System[19]) .

$$(x_1 - \varepsilon x_4)(x_1 - \varepsilon x_3) = 0,$$
$$(x_2 - \varepsilon x_4)(x_3 - \varepsilon x_1) = 0,$$
$$x_2 x_4 + \varepsilon (x_1 x_2 - x_2^2 - x_4^2) + 2\varepsilon^2 x_1 x_3 = 0$$

$\varepsilon \to 0$. Es hat acht verschiedene Lösungen:

1:	0,	0,	1,	0	
2:	ε,	ε,	0,	1	
3:	ε,	$-\varepsilon$,	1,	-1	
4:	ε,	2ε,	1,	2	
5, 6:	0,	λ,	0,	μ	mit $\varepsilon\lambda^2 - \lambda\mu + \varepsilon\mu^2 = 0$
7, 8:	$\varepsilon\lambda$,	μ,	$\varepsilon^2\lambda$,	λ	mit $(\varepsilon - 2\varepsilon^5)\lambda^2 - (1 + \varepsilon^2)\lambda\mu + \varepsilon\mu^2 = 0$.

ur *eine* davon, die erste, konvergiert für $\varepsilon \to 0$ gegen 0, 0, 1, 0. Durch llentauschung von x_3 mit x_4 ergibt sich auch die Lösung 0, 0, 0, 1 als einfach.

Um schließlich die Lösung 0, 0, 1, a für $a \neq 0$ ebenfalls als einfach zu kennen, setzen wir $x_4 - a x_3 = x_4'$. Dann ist das System gleichbedeutend t

$$x_1^2 = 0, \quad x_2 x_3 = 0, \quad x_2 x_4' = 0$$

d es handelt sich um die Lösung 0, 0, 1, 0. Man kann daher wie oben ver- ıren mit x_4' an Stelle von x_4. Damit ist für alle Lösungen, bei denen $= x_2 = 0$ ist, die Vielfachheit 1 nachgewiesen.

Zweites Beispiel.

$$x_1^2 - x_2 x_4 = 0, \quad 2x_1^2 - x_2 x_4 = 0, \quad 3x_1^2 - x_2 x_4 = 0.$$

eichbedeutend mit diesem System ist das folgende:

$$x_1^2 - x_2 x_4 = 0, \quad x_1^2 = 0, \quad x_1^2 = 0.$$

n bei diesem die Lösung 0, 0, 0, 1 als einfach zu erkennen, betrachten wir s benachbarte System[20])

$$x_1^2 - x_2 x_4 = 0,$$
$$(x_1 + \varepsilon x_3)(x_1 + \varepsilon x_3 + \varepsilon x_4) = 0,$$
$$(x_1 + \varepsilon x_2)(x_1 + \varepsilon x_3 + \varepsilon x_4 - \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^6 x_4) = 0$$

---

[19]) Aus diesem kann man natürlich durch Linearkombination auch wieder ein ichbedeutendes zum ursprünglichen System benachbartes bilden. Analoges gilt h späterhin bei all diesen Beispielen.

[20]) Man sieht jetzt, warum es nötig war, die Gleichung $x_1^2 = 0$ oben zweimal zu reiben. Wesentlich ist, daß man aus dem benachbarten System durch Linear-

für $\varepsilon \to 0$. Es hat acht verschiedene Lösungen:

$$\begin{array}{rcccc}
1: & 0, & 0, & 0, & 1 \\
2: & -\varepsilon, & 1, & 1, & \varepsilon^2 \\
3: & 0, & 0, & -1, & 1 \\
4: & -\varepsilon, & 1, & 1-\varepsilon^2, & \varepsilon^2 \\
5,\,6: & \pm\varepsilon^2, & \varepsilon^4, & -1\mp\varepsilon, & 1 \\
7,\,8: & -\varepsilon, & \pm\sqrt{\varepsilon+\varepsilon^6}, & 1, & \pm\dfrac{\varepsilon^2}{\sqrt{\varepsilon+\varepsilon^6}}.
\end{array}$$

Nur *eine* davon, die erste, konvergiert für $\varepsilon \to 0$ gegen 0, 0, 0, 1.

Um die Lösung 0, 0, a, 1 für $a \neq 0$ ebenfalls als einfach zu erkennen setzen wir $x_3 - a x_4 = x_3'$. Das System bleibt dann, da x_3 nicht darin vor kommt, unverändert und es handelt sich um die Lösung 0, 0, 0, 1. Man kann daher verfahren wie oben mit x_3' an Stelle von x_3.

Um schließlich auch die Lösung 0, 0, 1, 0 als einfach nachzuweisen betrachten wir das benachbarte System

$$\begin{gathered}
x_1^2 - (x_2 + \varepsilon x_3) x_4 = 0, \\
(x_1 - \varepsilon x_2 - \varepsilon^2 x_4)(x_1 - \varepsilon x_2 - \varepsilon x_3) = 0, \\
(x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_4)(x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon x_3) = 0
\end{gathered}$$

für $\varepsilon \to 0$. Es hat wieder acht verschiedene Lösungen:

$$\begin{array}{rcccc}
1: & 0, & 0, & 1, & 0 \\
2: & 0, & -\varepsilon, & 1, & 1 \\
3: & 0, & 0, & 0, & 1 \\
4: & 0, & -1, & 1, & 0 \\
5,\,6: & \varepsilon\lambda + \varepsilon^2\mu, & \lambda - \varepsilon\mu; & -2\lambda, & 2\mu \\
7,\,8: & \varepsilon\lambda + \varepsilon^2\mu, & -\lambda + \varepsilon\mu, & 2\lambda, & -2\mu
\end{array}\Bigg\} \text{ mit } \varepsilon^2\lambda^2 - (2 - 4\varepsilon - 2\varepsilon^3)\lambda\mu + (2\varepsilon + \varepsilon^4)\mu^2 = 0.$$

Nur *eine* davon, die erste, konvergiert für $\varepsilon \to 0$ gegen 0, 0, 1, 0. Damit ist wieder für alle Lösungen, bei denen $x_1 = x_2 = 0$ ist, die Vielfachheit nachgewiesen.

Drittes Beispiel.

$$(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0, \quad x_1 x_4 = 0, \quad x_2 x_4 = 0.$$

---

kombination wieder ein gleichbedeutendes zum ursprünglichen System benachbarte bilden kann. Während aber die drei Flächen des ursprünglichen Systems einem Büsche angehören, gilt das für die benachbarten Flächen nicht.

Um hier die Lösung 0, 0, 0, 1 als einfach zu erkennen, betrachten wir das achbarte System

$$(x_1 + x_2 - \varepsilon x_3)(x_1 - x_2 - \varepsilon x_4) = 0,$$
$$x_1(x_4 + 2\varepsilon x_2 - \varepsilon x_3) = 0,$$
$$x_2 x_4 + \varepsilon(x_1^2 + x_2^2 - x_2 x_3) = 0$$

$\varepsilon \to 0$. Es hat acht verschiedene Lösungen:

1:	0,	0,	0,	1
2:	0,	ε,	1,	$\varepsilon - \varepsilon^2$
3:	0,	0,	1,	0
4:	0,	$-\varepsilon^2$,	$1 - \varepsilon^2$,	ε
5:	-1,	1,	0,	-2ε
6:	ε,	ε,	2,	$2\varepsilon - 2\varepsilon^2$
7:	1,	1,	2,	0
8:	$-\varepsilon^2$,	ε^2,	$2\varepsilon^2 - 2$,	-2ε.

r *eine* davon, die erste, konvergiert für $\varepsilon \to 0$ gegen 0, 0, 0, 1. Um auch die sung 0, 0, a, 1 als einfach zu erkennen, setzen wir $x_3 - a x_4 = x_3'$. Dann ibt das System, da x_3 nicht darin vorkommt, unverändert, und es handelt n dann um die Lösung 0, 0, 0, 1. Man kann daher verfahren wie oben x_3' an Stelle von x_3.

Um schließlich auch die Lösung 0, 0, 1, 0 als einfach zu erkennen, bechten wir das mit dem gegebenen gleichbedeutende System

$$(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0, \quad (x_1 + x_2) x_4 = 0, \quad (x_1 - x_2) x_4 = 0$$

l dazu das benachbarte

$$(x_1 + x_2)(x_1 - x_2 + \varepsilon x_3) = 0,$$
$$(x_1 + x_2 - \varepsilon x_4)(x_4 - \varepsilon x_3) = 0,$$
$$(x_1 - x_2) x_4 - \varepsilon(x_1 x_3 - x_2 x_3 - x_3 x_4) - \varepsilon^2[(x_1 - x_2)^2 - (x_1 + x_2) x_3] = 0$$

$\varepsilon \to 0$. Es hat wieder acht verschiedene Lösungen:

1:	0,	0,	1,	0
2:	1,	-1,	-2ε,	0
3:	1,	-1,	2,	2ε
4:	1,	-1,	-2,	-2ε
5:	ε,	ε,	0,	2
6:	$\varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3$,	$\varepsilon - \varepsilon^2 - \varepsilon^3$,	-2ε,	$2 - 2\varepsilon^2$
7:	1,	1,	0,	0
8:	$1 + \varepsilon - \varepsilon^2$,	$1 - \varepsilon - \varepsilon^2$,	-2,	-2ε.

r *eine* davon, die erste, konvergiert für $\varepsilon \to 0$ gegen 0, 0, 1, 0. Damit ist alle Lösungen, bei denen $x_1 = x_2 = 0$ ist, die Vielfachheit 1 nachgewiesen.

Viertes Beispiel.

$$x_1^2 = 0, \quad x_2^2 = 0, \quad x_2 x_3 = 0.$$

Hier wird man wegen der ersten Gleichung wohl jede Lösung mindestens zweifach zählen wollen, wegen der zweiten Gleichung vielleicht sogar vierfach falls das nicht als zu hoch empfunden wird, weil der Faktor x_2 in der dritten Gleichung nur einfach auftritt. Aber für die spezielle Lösung 0, 0, 0, 1 dürfte da bei ihr beide Faktoren der dritten Gleichung verschwinden, gewiß die Vielfachheit 8 angemessen sein. Ohne mich mit den anderen aufzuhalten, will ich aber jetzt gerade für diese letzte Lösung die Vielfachheit 1 nachweisen. Dazu dient das benachbarte System

$$\begin{aligned} (x_1 - \varepsilon x_3)(x_1 + \varepsilon x_4) &= 0, \\ (x_2 - \varepsilon^3 x_3)(x_2 + \varepsilon^3 x_3 - \varepsilon^3 x_4) &= 0, \\ x_2 x_3 + \varepsilon (x_1^2 + x_2 x_4) - \varepsilon^3 x_3 x_4 &= 0 \end{aligned}$$

für $\varepsilon \to 0$. Es hat acht verschiedene Lösungen:

1:	0,	0,	0,	1	
2:	$\varepsilon - \varepsilon^2$,	$\varepsilon^3 - \varepsilon^4$,	$1 - \varepsilon$,	2	
3:	ε,	0,	1,	1	
4:	ε,	$-\varepsilon^3$,	1,	0	
5, 6:	$-\varepsilon$,	$\varepsilon^3 \lambda$,	λ,	1	mit $\lambda^2 - (1 - \varepsilon)\lambda + 1 = 0$
7:	$-\varepsilon$,	0,	1,	1	
8:	$-\varepsilon$,	$2\varepsilon^3 + \varepsilon^4$,	$-1 - \varepsilon$,	1	

Nur *eine* davon, die erste, konvergiert für $\varepsilon \to 0$ gegen 0, 0, 0, 1.

§ 6.

Zusammenfassung und Klarstellung.

Diese Beispiele mögen genügen. Ich habe noch einige weitere, auch höheren Grades, bei denen höhere Vielfachheit zu erwarten war, geprüft, stets mit negativem Erfolg. Zwar konnte ich nicht immer die Vielfachheit 1 nachweisen, weil mir die Aufstellung geeigneter benachbarter Systeme, die dies erzwingen, nicht gelang. Andererseits konnte ich aber auch in keinem einzigen Fall beweisen, daß es solche benachbarte Systeme nicht gibt. Daher ist vielleicht die Vermutung nicht ganz unberechtigt (von deren Beweis ich allerdings weit entfernt bin), daß bei dieser Definition die Vielfachheit einer nicht isolierten Lösung *stets* gleich 1 ist, so daß dieser Begriff überhaupt gegenstandslos

ist. Übrigens würde die in § 2 als unmöglich nachgewiesene Vielfachheits-finition sich hier besser bewähren und eine höhere Vielfachheit liefern. i den ersten beiden Beispielen ist es z. B. so, daß die Polynome des ersten stems von Eliminationsgleichungen ein Quadrat als gemeinsamen Teiler ben. Die beiden Definitionen decken sich also hier ebensowenig wie im Fall dlich vieler Lösungen. Jedenfalls dürfte aus § 2 und 5 zur Genüge hervor-nen, *daß die beiden von Herrn* Severi *gegebenen Vielfachheitsdefinitionen ein-der widersprechen und daß keine von beiden das leistet, was man erwartet.* Ab-ließend ist also festzustellen, *daß es eine brauchbare ganz allgemein gültige elfachheitsdefinition heute nicht gibt*; es gibt nicht einmal eine auf den Spezial-l von drei (und erst recht nicht von mehr als drei) homogenen Gleichungen t vier Unbekannten und unendlich vielen Lösungen bezügliche.

Welche Schlußfolgerung ergibt sich nun daraus für den Kroneckerschen tz und die Vahlensche Quintik? Man muß mehrere Aussagen scharf aus-anderhalten:

Satz 1 (richtig). *Wenn ein System von beliebig vielen homogenen Glei-ungen mit $k+1$ Unbekannten endlich oder unendlich viele Lösungen hat, so t es stets ein System von $k+1$ oder weniger homogenen Gleichungen, das nau dieselben Lösungen hat.*

Satz 2 (heute sinnlos). *Wenn ein System von beliebig vielen homogenen eichungen mit $k+1$ Unbekannten endlich oder unendlich viele Lösungen hat, gibt es stets ein System von $k+1$ oder weniger homogenen Gleichungen, genau dieselben Lösungen hat, und zwar jede mit der gleichen Vielfach-t wie das ursprüngliche System.*

Satz 3 (richtig). *Eine irreduzible Mannigfaltigkeit im R_k kann stets als rchschnitt von $k+1$ oder weniger Flächen*[21]) *des R_k dargestellt werden.*

Satz 4 (zweifelhaft, für $k=3$ auch nicht eindeutig). *Eine irreduzible nnigfaltigkeit im R_k kann stets als einfacher Durchschnitt von $k+1$ oder niger Flächen des R_k dargestellt werden.*

Satz 5 (richtig). *Die Vahlensche Quintik kann als Durchschnitt von drei ichen des R_3 dargestellt werden.*

Satz 6 (nicht eindeutig und zweifelhaft). *Die Vahlensche Quintik kann einfacher Durchschnitt von drei Flächen des R_3 dargestellt werden.*

Zu diesen Sätzen ist folgendes zu sagen:

Der Satz 1 ist der allgemeine Kroneckersche Satz, der z. B. in meiner beit [8] bewiesen ist.

[21]) Unter Flächen des R_k sind natürlich *algebraische* Flächen (Hyperflächen) zu rstehen.

Der Satz 2 hat nur dann einen Sinn, wenn man einen allgemein gültige Vielfachheitsbegriff hat. Da das heute nicht der Fall ist, ist der Satz heut sinnlos und er bleibt solange sinnlos, bis der fehlende Begriff geschaffen is Erst dann kann die Frage gestellt werden, ob der Satz richtig oder falsch is

Der Satz 3 ist lediglich die geometrische Fassung eines Spezialfall von Satz 1, also richtig.

Der Satz 4 ist die geometrische Fassung eines Spezialfalles von Satz Er ist solange sinnlos, wie der darin vorkommende Begriff „einfach" nich definiert ist; das war mindestens bis zum Erscheinen der SEVERIsche Arbeit [11] der Fall. Durch diese Arbeit bekommt der Satz, wenn man d darin angegebene oben am Schluß des § 2 erwähnte Definition annehme will (was ich aber nicht empfehle), einen Sinn. Ob er dann aber richtig od falsch ist, vermag ich nicht zu sagen; jedenfalls ist er nie bewiesen worden[22] Im Fall $k = 3$ kann man auch die zweite SEVERIsche Definition, die obe in § 4 und 5 besprochen wurde, annehmen (was ich aber auch nicht empfehle Dann bekommt der Satz ebenfalls einen Sinn, aber einen anderen. Auc in diesem Sinn ist er nie bewiesen worden, und ich weiß nicht, ob er richt oder falsch ist.

Der Satz 5 ist in meiner Arbeit [7] algebraisch bewiesen und der Bewe ist von Herrn SEVERI [11] in ein geometrisches Gewand gekleidet worde

Der Satz 6 ist von mir nie behauptet und von Herrn SEVERI [11] a falsch bezeichnet worden. Aber der Satz ist überhaupt wieder solange sinnlo wie der darin vorkommende Begriff „einfach" nicht definiert ist, was wied mindestens bis zum Erscheinen der SEVERIschen Arbeit [11] der Fall wa Wenn nun, nachdem diese Arbeit erschienen ist, eine der beiden Definitione angenommen wird, so bekommt der Satz einen Sinn, und zwar bei der erste Definition einen anderen als bei der zweiten. Die Frage, ob er dann richt oder falsch ist, dürfte in jedem der beiden Sinne sehr schwer zu entscheide sein. Die speziellere Frage, ob gerade die in meiner Arbeit [7] angegebene drei Flächen die Kurve als „einfachen" Durchschnitt enthalten, scheint He SEVERI im Sinne der ersten Definition geprüft und eine verneinende Antwo darauf gefunden zu haben. Im Sinn der zweiten Definition habe ich es ve sucht, ohne bis jetzt zu einem Resultat zu gelangen, und auch in der SEVER schen Arbeit kann ich eine Klärung der Frage unter wirklicher Heranziehu der zweiten Definition nicht finden. Aber auch wenn diese Frage in beide Sinnen zu verneinen sein sollte, so wäre damit noch lange nicht gesagt, da es nicht drei andere Flächen gibt, die die Kurve im einen oder anderen Sin

[22]) Das war der Stand meines Wissens am 19. Juli 1943. Inzwischen hat ab Herr VAN DER WAERDEN beweisen können, daß der Satz falsch ist. Vgl. d Nachtrag am Schluß dieser Arbeit [Zusatz bei der Korrektur].

„einfachen" Durchschnitt enthalten. Der Satz 6 kann also heute auf
en Fall als falsch erklärt werden, vielmehr ist die (nach meiner Meinung
gens nicht sehr wichtige) Frage, ob er in einem der beiden Sinne richtig
r falsch ist, zur Zeit noch offen.

Herr Severi hat gegen meinen Satz 5 den merkwürdigen Einwand erhoben,
er nur richtig sei, wenn man sich auf einen falschen Standpunkt stelle,
aber vom richtigen Standpunkt aus nur der Satz 6 in Frage komme und
der nicht bewiesen, ja sogar falsch sei. Mit derselben Logik hätte er schon
gst gegen die Sätze 1 und 3 den Einwand erheben müssen, daß sie nur
tig seien, wenn man sich auf einen falschen Standpunkt stelle, daß aber
richtigen Standpunkt aus nur die Sätze 2 und 4 in Frage kämen und daß
nicht bewiesen, also vielleicht falsch wären. Er hat das aber nie getan
tutes auch jetzt nicht, sagt vielmehr ausdrücklich, der Kroneckersche
oder wenigstens der auf die irreduzible Mannigfaltigkeit bezügliche
zialfall sei von Molk, König und Bertini bewiesen worden. Daraus geht
vor, daß er den genannten Autoren den „richtigen" Standpunkt zuerkennt,
daß er glaubt, sie hätten nicht nur den Satz 3 (und vielleicht auch den
1), sondern sogar den Satz 4 (und vielleicht auch den Satz 2) bewiesen.
meine Bemerkungen zum Satz 4 (und Satz 2) zeigen, ist dieser Glaube
Irrtum.

§ 7.

Über die Bedingungen dafür, daß ein Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat.

Es soll jetzt noch ein allgemeiner Satz hergeleitet werden, von dem in
nur ein Spezialfall benötigt und bewiesen wurde. Wir schreiben dabei
-1 an Stelle des seitherigen k.

Hilfssatz. *Ein System von l homogenen Gleichungen*

$$f_\lambda(x_1, \ldots, x_k) = 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, l),$$

alle vom selben Grad m sind, hat genau die gleichen Lösungen wie das System von k Gleichungen

$$\sum_{\lambda=1}^{l} u_{\varkappa\lambda} f_\lambda(x_1, \ldots, x_k) = 0 \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k),$$

die $u_{\varkappa\lambda}$ Unbestimmte sind.

Beweis. Daß (B) aus (A) folgt, ist klar; die Umkehrung muß bewiesen
den. Für $l \leqq k$ ist sie trivial, weil dann die Matrix $||u_{\varkappa\lambda}||$ vom Rang l
Sei also $l > k$. Dann setzen wir

$$\sum_{\lambda=1}^{l} u_{\varkappa\lambda} f_\lambda(x_1, \ldots, x_k) = \varphi_\varkappa(x_1, \ldots, x_k) \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k)$$

und außerdem

$$\sum_{\lambda=1}^{l} v_\lambda f_\lambda(x_1, \ldots, x_k) = \psi(x_1, \ldots, x_k),$$

wo die v_λ weitere Unbestimmte sind. Nun besteht zwischen den $\varphi_\varkappa$ und eine homogene Abhängigkeit[23])

$$F(\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \psi) = 0, \tag{1}$$

etwa vom Grad M. Die Koeffizienten von (1) sind natürlich Polynome d $u_{\varkappa\lambda}$ und v_λ, was wir dadurch zum Ausdruck bringen wollen, daß wir statt (schreiben:

$$G(\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \psi; u_{\varkappa\lambda}, v_\lambda) = 0. \tag{1a}$$

Es gibt aber gewiß auch eine homogene Abhängigkeit vom Grad M, der das Glied mit ψ^M wirklich vorkommt. Denn sollte das in (1a) noch nicl der Fall sein, so setzen wir

$$\varphi_\varkappa - a_\varkappa \psi = \Phi_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k$$

wo die $a_\varkappa$ weitere Unbestimmte sind. Dann geht (1a) über in

$$G(\Phi_1 + a_1\psi, \ldots, \Phi_k + a_k\psi, \psi; u_{\varkappa\lambda}, v_\lambda) = 0, \tag{2}$$

wofür wir kürzer schreiben:

$$H(\Phi_1, \ldots, \Phi_k, \psi; u_{\varkappa\lambda}, v_\lambda) = 0. \tag{3}$$

Hier ist nun der Koeffizient von ψ^M gleich $G(a_1, \ldots, a_k, 1; u_{\varkappa\lambda}, v_\lambda)$, also gew von 0 verschieden, weil die $a_\varkappa, u_{\varkappa\lambda}, v_\lambda$ Unbestimmte sind und G in bezu auf die ersten $k+1$ Argumente homogen ist. Da nun nach der Definitio der $\varphi_\varkappa$, ψ, $\Phi_\varkappa$

$$\varphi_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{l} u_{\varkappa\lambda} f_\lambda, \quad \psi = \sum_{\lambda=1}^{l} v_\lambda f_\lambda, \quad \Phi_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{l} (u_{\varkappa\lambda} - a_\varkappa v_\lambda) f_\lambda$$

ist, so folgt aus (3) einfach durch die Bezeichnungsänderung $u_{\varkappa\lambda} \to u_{\varkappa\lambda} + a_\varkappa$ sofort

$$H(\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \psi, u_{\varkappa\lambda} + a_\varkappa v_\lambda, v_\lambda) = 0, \tag{4}$$

wobei der Koeffizient von ψ^M gleich $G(a_1, \ldots, a_k, 1; u_{\varkappa\lambda} + a_\varkappa v_\lambda, v_\lambda)$, al wieder $\neq 0$ ist. Mit (4) ist daher eine Abhängigkeit M-ten Grades zwische den $\varphi_\varkappa$ und ψ gewonnen, in der das Glied mit ψ^M wirklich vorkommt. A (4) folgt dann sofort, daß die Gleichungen (B), d. h. die Gleichungen $\varphi_\varkappa =$ die Gleichung $\psi = 0$ nach sich ziehen.

Bilden wir jetzt $l - k$ Linearkombinationen (es ist ja $l > k$)

$$\psi_\mu = \sum_{\lambda=1}^{l} v_{\quad\lambda} f_\lambda \qquad (\mu = 1, \ldots, l - k$$

[23]) Der einfache Beweis dafür verläuft genau wie in meiner Arbeit [8], S. 44

wo die $v_{\mu\lambda}$ neue Unbestimmte sind, so ziehen die k Gleichungen (B) nach dem Bewiesenen die $l-k$ Gleichungen $\psi_\mu = 0$ nach sich. Dann ist also $\varphi_\varkappa = 0$, $\psi_\mu = 0$, d. h.

$$\sum_{\lambda=1}^{l} u_{\varkappa\lambda} f_\lambda = 0, \quad \sum_{\lambda=1}^{l} v_{\mu\lambda} f_\lambda = 0.$$

Daraus folgt aber, weil die l-reihige Determinante $\begin{vmatrix} u_{\varkappa\lambda} \\ v_{\mu\lambda} \end{vmatrix}$ lauter Unbestimmte zu Elementen hat, also $\neq 0$ ist, daß alle f_λ gleich 0 sind, daß also auch die Gleichungen (A) gelten. W. z. b. w.

Satz A. *Dafür, daß das System von l homogenen Gleichungen m-ten Grades*

$$f_\lambda(x_1, \ldots, x_k) = 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots l)$$

unendlich viele Lösungen hat, ist notwendig und hinreichend, daß die Resultante

$$R\left(\sum_{\lambda=1}^{l} u_{1\lambda} f_\lambda - u_1 y^m, \ \ldots, \ \sum_{\lambda=1}^{l} u_{k\lambda} f_\lambda - u_k y^m, \ \sum_{\varkappa=1}^{k} v_\varkappa x_\varkappa - v y\right)$$
$$x_1 \qquad , \ \ldots, \qquad x_k \qquad , \qquad y$$

als Polynom der Unbestimmten $u_{\varkappa\lambda}$, $u_\varkappa$, $v_\varkappa$, v identisch verschwindet.

Beweis. Wenn das gegebene System unendlich viele Lösungen hat, so hat das System

$$\sum_{\lambda=1}^{l} u_{1\lambda} f_\lambda - u_1 y^m = 0, \ \ldots, \ \sum_{\lambda=1}^{l} u_{k\lambda} f_\lambda - u_k y^m = 0$$

mit den Unbekannten $x_1, \ldots, x_k, y$ ebenfalls unendlich viele Lösungen, nämlich schon unendlich viele mit $y = 0$. Daher verschwindet nach dem zu Beginn des § 3 erwähnten Satz die obige Resultante.

Wenn umgekehrt diese Resultante verschwindet, so hat das System

$$(5) \qquad \sum_{\lambda=1}^{l} u_{1\lambda} f_\lambda - u_1 y^m = 0, \quad \ldots, \quad \sum_{\lambda=1}^{l} u_{k\lambda} f_\lambda - u_k y^m = 0,$$
$$\sum_{\varkappa=1}^{k} v_\varkappa x_\varkappa - v y = 0$$

eine Lösung [24]). Dabei kann nicht $y \neq 0$ sein; sonst könnte man $y = 1$ setzen, und das System

$$\sum_{\lambda=1}^{l} u_{1\lambda} f_\lambda = u_1, \ \ldots, \ \sum_{\lambda=1}^{l} u_{k\lambda} f_\lambda = u_k, \ \sum_{\varkappa=1}^{k} v_\varkappa x_\varkappa = v$$

[24]) Siehe z. B. [6], Satz 139.

hätte eine Lösung. Aber das ist unmöglich, weil zwischen den linken Seiten eine Abhängigkeit besteht[25]) und zwischen den rechten, die ja Unbestimmte sind, nicht. Bei einer Lösung von (5) ist also $y = 0$, d. h. das System

$$(6) \qquad \sum_{\lambda=1}^{l} u_{1\lambda} f_\lambda = 0, \ \ldots, \ \sum_{\lambda=1}^{l} u_{k\lambda} f_\lambda = 0, \ \sum_{\varkappa=1}^{k} v_\varkappa x_\varkappa = 0$$

hat eine Lösung. Daraus folgt aber, daß das System der ersten k Gleichungen in (6) sogar unendlich viele Lösungen hat. Denn wenn es nur endlich viele wären, so könnte keine von ihnen die letzte Gleichung in (6) erfüllen, da ja die $v_\varkappa$ Unbestimmte sind[26]).

Nunmehr folgt der Satz A sofort aus dem Hilfssatz.

Satz B. *Wenn die Koeffizienten eines homogenen Gleichungssystems*

$$f_\lambda(x_1, \ldots, x_k) = 0 \qquad (\lambda = 1, \ldots, l)$$

Polynome von Unbestimmten sind und wenn das System unendlich viele Lösungen hat, dann hat jedes System, das aus dem gegebenen durch irgendwelche Spezialisierung der Unbestimmten entsteht, ebenfalls unendlich viele Lösungen.

Beweis. Das System hat natürlich, wenn n_λ der Grad von f_λ ist und wenn $\operatorname{Max} n_\lambda = m$ gesetzt wird, genau dieselben Lösungen wie das System

$$x_\varkappa^{m-n_\lambda} f_\lambda(x_1, \ldots, x_k) = 0 \quad (\varkappa = 1, \ldots, k; \ \lambda = 1, \ldots, l).$$

Daher ist es keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir annehmen, daß alle Gleichungen des gegebenen Systems von gleichem Grad m sind. Wenn nun das System *vor* der Spezialisierung unendlich viele Lösungen hat, so verschwindet nach Satz A die dortige Resultante. Das tut sie dann aber auch *nach* der Spezialisierung, so daß nach Satz A immer noch unendlich viele Lösungen vorhanden sind.

Literatur.

[1] A. Hurwitz, Über Trägheitsformen eines algebraischen Moduls. Annali di matematica, ser. 3, **20** (1913).

[2] Jul. König, Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Größen. Leipzig 1903.

[3] F. S. Macaulay, The algebraic theory of modular systems. Cambridge 1916.

[4] F. Mertens, Über die bestimmenden Eigenschaften der Resultante von n Formen mit n Veränderlichen. Sitzber. d. Wiener Akad., Math.-naturw. Klasse, Abt. IIa, **93** (1886).

[5] F. Mertens, Zur Theorie der Elimination. Ebenda **108** (1899).

[6] O. Perron, Algebra, Band 1, 2. Auflage. Berlin 1932.

[7] O. Perron, Über das Vahlensche Beispiel zu einem Satz von Kronecker. Math. Zeitschr. **47** (1941).

[25]) Siehe z. B. [6], Satz 56.

[26]) Eine genauere Detaillierung dieser Schlußweise findet man in [6], S. 290.

[8] O. Perron, Beweis und Verschärfung eines Satzes von Kronecker. Math. Annalen **118** (1942).

[9] Fr. Severi, Lezioni di analisi, vol. 1, sec. ediz., Bologna 1941.

[10] Fr. Severi, Über die Grundlagen der algebraischen Geometrie. Abhandl. a. d. mathemat. Seminar der Hansischen Universität **9** (1933).

[11] Fr. Severi, Über die Darstellung algebraischer Mannigfaltigkeiten als Durchschnitt von Formen. Ebenda **15** (1943).

[12] B. L. van der Waerden, Moderne Algebra, II. Teil. Berlin 1931. 2. Auflage, 1940.

[13] B. L. van der Waerden, Einführung in die algebraische Geometrie. Berlin 1939.

Nachtrag. (Zusatz bei der Korrektur). Einer Mitteilung von Herrn van der Waerden entnehme ich das folgende Beispiel einer Raumkurve, die sich nicht einfach gezählt als Schnitt von Flächen im Sinne der ersten Definition von Severi darstellen läßt, worauf oben S. 660 und 674 hingewiesen wurde. Herr van der Waerden macht mich außerdem auf ein schon von Macaulay [3], S. 22, angegebenes, ganz ähnliches Beispiel einer allerdings nicht irreduziblen Kurve aufmerksam. Die von Macaulay angegebene Kurve zerfällt in drei Geraden, die durch einen Punkt gehen, aber nicht in einer Ebene liegen.

Zunächst sei an den Wortlaut der Severischen Definition erinnert, der oben auf S. 659, 660 wiedergegeben ist.

Nun sei C eine irreduzible Raumkurve mit einem dreifachen Punkt O mit drei nicht in einer Ebene liegenden Tangenten. Eine solche Kurve wird z. B. durch die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x &= t\ (t-1)^2\,(t+1)^2 \\ y &= t^2\,(t-1)\ (t+1)^2 \\ z &= t^2\,(t-1)^2\,(t+1) \end{aligned}$$

gegeben. Ob man die Kurve vorher einer allgemeinen linearen Koordinatentransformation unterwirft oder nicht, macht für den folgenden Beweis nichts aus.

Es seien nun $f_1 = 0, \ldots, f_h = 0$ die Gleichungen von C. Zur Bildung des ersten Systems von Eliminationsgleichungen hat man aus

$$\begin{aligned} X &= \xi_1 f_1 + \cdots + \xi_h f_h, \\ Y &= \eta_1 f_1 + \cdots + \eta_h f_h \end{aligned}$$

die Resultante $R(y, z)$ nach x zu bilden, diese nach Potenzprodukten der ξ und η zu ordnen und die Koeffizienten $g_1, \ldots, g_l$ dieser Potenzprodukte gleich 0 zu setzen.

Jede durch C gehende Fläche $f = 0$ muß, wie Macaulay [3] (S. 53) auch schon bemerkt hat, in O mindestens einen Doppelpunkt haben; denn sonst

müßten die drei Tangenten von C in O ja in der Tangentialebene der Fläch liegen. Das gilt insbesondere für die Flächen $X = 0$ und $Y = 0$. Die Schnitt kurve dieser beiden Flächen hat also in O einen mindestens vierfachen Punkt Dasselbe gilt also von ihrer Projektion auf die yz-Ebene, der Kurve $R(y, z$ $= 0$. Folglich fangen $R(y, z)$ und daher auch alle Polynome $g_1, \ldots, g_l$, nach steigenden Potenzen von y und z geordnet, erst mit Gliedern mindesten 4. Grades an.

Die Projektion von C auf die yz-Ebene ist eine irreduzible Kurve $g(y, z$ $= 0$, die in O nur einen dreifachen Punkt hat. $g_1, \ldots, g_l$ sind alle durch g teilbar, haben aber in O mindestens einen vierfachen Punkt. Also sind zwei Fälle möglich:

1. $g_1, \ldots, g_l$ sind durch eine höhere als die erste Potenz von g teilbar;

2. der g. g. T. von $g_1, \ldots, g_l$ ist g, aber nach der Entfernung dieses g. g. T. werden die übrigbleibenden Faktoren $\psi_1, \ldots, \psi_l$ alle im Punkte O noch Null.

In beiden Fällen ist C nicht einfach gezählter Durchschnitt der Flächen $f_1 = 0, \ldots, f_h = 0$ im Sinne der zitierten Severischen Definition; denn im Fall 1. hat das *erste System von Eliminationsgleichungen* als g. g. T. eine höhere Potenz eines irreduziblen Polynoms, und im Fall 2. hat das *zweite System von Eliminationsgleichungen* eine gemeinsame Wurzel.

(Eingegangen am 19. Juli 1943.)

Entfernung zweier zufälligen Größen und die Konvergenz nach Wahrscheinlichkeit.

Von

Ky Fan in Paris.

Der Zweck dieser kurzen Mitteilung ist, eine neue Entfernungsdefinition für die zufälligen Größen derart zu geben, daß im metrischen Raume der zufälligen Größen mit dieser Entfernungsdefinition die Konvergenz genau die Konvergenz nach Wahrscheinlichkeit und daß der Raum vollständig ist[1]).

I. Definition von (X, Y). Man betrachtet alle auf der Grundmenge eines Borelschen Wahrscheinlichkeitsfeldes[2]) definierten zufälligen Größen[2]) als die Punkte eines Raumes. Dabei sollen zwei äquivalente[2]) zufällige Größen demselben Punkt entsprechen. Es seien X, Y zwei zufällige Größen. Wir bezeichnen mit $P\{|X - Y| \geqq \varepsilon\}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Ungleichung $|X - Y| \geqq \varepsilon$ gilt. Der Ausdruck $\frac{P\{|X - Y| \geqq \varepsilon\}}{\varepsilon}$ ist also eine abnehmende Funktion von ε, wenn ε auf der Halbgerade $\varepsilon > 0$ variiert. Der Wert dieser Funktion ist offenbar kleiner als 1 für jede Zahl $\varepsilon > 1$. Wir nehmen nun als *Entfernung* (X, Y) der beiden zufälligen Größen X, Y die untere Grenze der positiven Werte von ε, für welche die Ungleichung

$$\frac{P\{|X - Y| \geqq \varepsilon\}}{\varepsilon} < 1 \tag{1}$$

gilt. Es ist klar, daß $0 \leqq (X, Y) = (Y, X) \leqq 1$ ist.

II. Bedingung für $(X, Y) = 0$. Sind X, Y zwei äquivalente zufällige Größen, so gilt offenbar die Ungleichung (1) für jede positive Zahl ε. Daraus folgt es, daß die Entfernung zweier äquivalenten zufälligen Größen immer verschwindet. Zum Beweise der Umkehrung genügt es, die folgende Tatsache zu beweisen: Die Bedingung $(X, Y) = 0$ hat zur Folge, daß für alle $\varepsilon > 0$, $P\{|X - Y| \geqq \varepsilon\} = 0$ ist.

Es sei $(X, Y) = 0$. Setzen wir voraus, im Gegensatz zu der zu beweisenden Behauptung, daß es eine positive Zahl ε_0 gibt, für welche $P\{|X - Y| \geqq \varepsilon_0\} > 0$ ist, so kann man eine Zahl ε_1 derart wählen, daß

$$0 < \varepsilon_1 < P\{|X - Y| \geqq \varepsilon_0\} \tag{2}$$

[1]) Eine andere solche Entfernungsdefinition wurde von Herrn Fréchet gegeben. Siehe M. Fréchet, Recherches théoriques modernes sur la théorie des probabilités, I, Paris 1937. S. 194.

[2]) Vgl. A. Kolmogoroff, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin 1933.

ist. Wegen $(X, Y) = 0$ ist aber

$$P\{|X - Y| \geqq \varepsilon_0\} < \varepsilon_0, \tag{3}$$

$$P\{|X - Y| \geqq \varepsilon_1\} < \varepsilon_1. \tag{4}$$

Man erhält also, nach (2), (3), $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ und daher

$$P\{|X - Y| \geqq \varepsilon_0\} \leqq P\{|X - Y| \geqq \varepsilon_1\}. \tag{5}$$

Aus (2) und (5) folgt

$$\varepsilon_1 < P\{|X - Y| \geqq \varepsilon_1\},$$

was der Ungleichung (4) widerspricht. *Daher ist die Bedingung* $(X, Y) = 0$ *für die Äquivalenz der zufälligen Größen* X, Y *notwendig und hinreichend.*

III. Die Dreiecksungleichung. Wir wollen jetzt die Dreiecksungleichung

$$(X, Z) \leqq (X, Y) + (Y, Z) \tag{6}$$

beweisen. Setzen wir $d_1 = (X, Y)$, $d_2 = (Y, Z)$, so ist für jede positive Zahl ε

$$P\{|X - Y| \geqq d_1 + \varepsilon\} < d_1 + \varepsilon,$$

$$P\{|Y - Z| \geqq d_2 + \varepsilon\} < d_2 + \varepsilon,$$

also[3])

$$P\{|X - Z| \geqq d_1 + d_2 + 2\varepsilon\} \leqq P\{|X - Y| \geqq d_1 + \varepsilon\} + P\{|Y - Z| \geqq d_2 + \varepsilon\} < d_1 + d_2 + 2\varepsilon.$$

Es folgt daher $(X, Z) \leqq d_1 + d_2 + 2\varepsilon$. Die positive Zahl ε kann aber beliebig klein sein; also muß die Ungleichung (6) gelten.

IV. Konvergenz nach Wahrscheinlichkeit[2]). *Für die Konvergenz nach Wahrscheinlichkeit der Folge* $\{X_n\}$ *gegen eine zufällige Größe* X *ist die Bedingung*

$$\lim_{n \to \infty} (X_n, X) = 0$$

notwendig und hinreichend.

Konvergiert die Folge $\{X_n\}$ nach Wahrscheinlichkeit gegen X, so läßt sich zu jeder beliebig vorgegebenen positiven Zahl ε eine natürliche Zahl $N(\varepsilon)$ finden mit der Eigenschaft: Für jedes $n \geqq N(\varepsilon)$ wird $P\{|X_n - X| \geqq \varepsilon\} < \varepsilon$. Daraus sieht man, daß $(X_n, X) \leqq \varepsilon$ ist für jedes $n \geqq N(\varepsilon)$. Also ist $\lim_{n \to \infty} (X_n, X) = 0$.

Ist umgekehrt $\lim_{n \to \infty} (X_n, X) = 0$, so läßt sich zu jeder Zahl $\delta > 0$ eine natürliche Zahl $N(\delta)$ so finden, daß $(X_n, X) < \delta$ ist für alle $n \geqq N(\delta)$. Es

[3]) Dabei wird eine bekannte Ungleichung der Wahrscheinlichkeitsrechnung verwendet. Siehe das genannte Buch von FRÉCHET, S. 162.

folgt also:

$$P\{|X_n - X| \geqq \delta\} < \delta \quad \text{für alle } n \geqq N(\delta). \tag{7}$$

Es seien jetzt ε, η zwei beliebig vorgegebene positive Zahlen. Wir wählen eine positive Zahl δ, für welche $\delta < \varepsilon$, $\delta < \eta$ ist. Zu dieser Zahl δ läßt sich also eine natürliche Zahl $N(\delta)$ finden mit der Eigenschaft (7), dann ist

$$P\{|X_n - X| \geqq \eta\} \leqq P\{|X_n - X| \geqq \delta\} < \delta < \varepsilon \text{ für alle } n \geqq N(\delta);$$

was die Konvergenz nach Wahrscheinlichkeit bedeutet.

V. Cauchysches Konvergenzkriterium. Nach einem bekannten Satze von Herrn E. Slutsky[4]) kann man leicht das folgende Kriterium beweisen: *Für die Konvergenz nach Wahrscheinlichkeit der Folge $\{X_n\}$ ist die folgende Bedingung notwendig und hinreichend: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein solches n, daß für jedes $p > 0$ die Ungleichung $(X_n, X_{n+p}) < \varepsilon$ gilt.*

[4]) Siehe S. 169 in der zitierten Darstellung von Fréchet.

(Eingegangen am 12. August 1943.)

Integration linearer Differentialgleichungen durch Laplacesche Integrale. II*).

Von

J. Horn in Darmstadt.

§ 3.

Die lineare Differentialgleichung mit der Unbestimmtheitsstelle $x = \infty$ *vom Rang* 2

$$(\mathfrak{A}) \qquad \frac{1}{x^m}\frac{d^m y}{dx^m} + \mathfrak{P}_1 \frac{1}{x^{m-1}}\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + \mathfrak{P}_{m-1}\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \mathfrak{P}_m y = 0,$$

wo

$$\mathfrak{P}_\mu = a_\mu + \frac{a_\mu^{(1)}}{x} + \frac{a_\mu^{(2)}}{x^2} + \cdots \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$

in der Umgebung von $x = \infty$ *regulär ist,* hat die charakteristische Gleichung

$$\alpha^m + a_1 \alpha^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\alpha + a_m = 0,$$

deren Wurzeln verschieden sein mögen. Um die Differentialgleichung $(\mathfrak{A})$ auf ein Differentialgleichungssystem von der Form (A) oder (A_1) in § 1 zurückzuführen, führen wir die abhängigen Veränderlichen

$$y_1 = y, \quad y_2 = \frac{1}{x}\frac{dy_1}{dx}, \quad y_3 = \frac{1}{x}\frac{dy_2}{dx}, \ \ldots, \ y_m = \frac{1}{x}\frac{dy_{m-1}}{dx}$$

ein, so daß

$$\frac{dy_1}{dx} = x\,y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} = x\,y_3, \ldots, \quad \frac{dy_{m-1}}{dx} = x\,y_m$$

ist. Wir drücken die Ableitungen von y durch die neuen Veränderlichen aus:

$$y = y_1, \ \frac{dy}{dx} = xy_2,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = x\frac{dy_2}{dx} + y_2 = x^2 y_3 + y_2,$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = x^2 \cdot xy_4 + 2\,xy_3 + xy_3 = x^3 y_4 + 3\,xy_3,$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = x^3 \cdot xy_5 + 3\,x^2 y_4 + 3\,x \cdot xy_4 + 3\,y_3 = x^4 y_5 + 6\,x^2 y_4 + 3\,y_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = x^n y_{n+1} + [n]_1 x^{n-2} y_n + [n]_2 x^{n-4} y_{n-1} + [n]_3 x^{n-6} y_{n-2} + \cdots,$$

*) Fortsetzung der Arbeit auf S. 339—350 dieses Bandes. § 3 und § 4 knüpfen an § 1 an, § 5 ist von § 1 unabhängig; § 6 verallgemeinert § 2.

wo es auf die Werte der Zahlenkoeffizienten $[n]_1, \ldots$ nicht ankommt. Es ist also

$$y = y_1, \quad \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} = y_2, \quad \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dx^2} = y_3 + \frac{1}{x^2}y_2,$$

$$\frac{1}{x^3}\frac{d^3y}{dx^3} = y_4 + \frac{2}{x^2}y_3, \quad \frac{1}{x^4}\frac{d^4y}{dx^4} = y_5 + \frac{6}{x^2}y_4 + \frac{3}{x^4}y_3, \ldots,$$

$$\frac{1}{x^n}\frac{d^ny}{dx^n} = y_{n+1} + \frac{[n]_1}{x^2}y_n + \frac{[n]_2}{x^4}y_{n-1} + \frac{[n]_3}{x^6}y_{n-2} + \ldots;$$

dabei ist zu setzen:

$$y_{m+1} = \frac{1}{x}\frac{dy_m}{dx}.$$

Demnach unterscheidet sich $\frac{1}{x^n}\frac{d^ny}{dx^n}$ von y_{n+1} um eine lineare homogene Funktion von $y_n, y_{n-1}, \ldots$; $\frac{1}{x^m}\frac{d^my}{dx^m}$ unterscheidet sich von $\frac{1}{x}\frac{dy_m}{dx}$ um eine lineare homogene Funktion von $y_m, y_{m-1}, \ldots$; die Koeffizienten dieser linearen Funktionen verschwinden für $x = \infty$.

Die Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$)

$$\frac{1}{x^m}\frac{d^my}{dx^m} + (a_1 + \cdots)\frac{1}{x^{m-1}}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + (a_{m-1} + \cdots)\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + (a_m + \cdots)y = 0$$

geht über in das System

$$(\mathfrak{A}') \begin{cases} \frac{1}{x}\frac{dy_1}{dx} - y_2 = 0, \\ \frac{1}{x}\frac{dy_2}{dx} - y_3 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{1}{x}\frac{dy_{m-1}}{dx} - y_m = 0, \\ \frac{1}{x}\frac{dy_m}{dx} + (a_1 + \cdots)y_m + (a_2 + \cdots)y_{m-1} + \cdots + (a_{m-1} + \cdots)y_2 + (a_m + \cdots)y_1 = 0; \end{cases}$$

die in den Klammern weggelassenen Glieder verschwinden für $x = \infty$.

Das allgemeinere System linearer Differentialgleichungen

$$\frac{1}{x}\frac{dy_\alpha}{dx} + \sum_{\beta=1}^{m}\left(a_{\alpha\beta} + \frac{a_{\alpha\beta}^{(1)}}{x} + \cdots\right)y_\beta = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

kann, wenn die Gleichung m-ten Grades in s

$$|a_{\alpha\beta} - s\,\delta_{\alpha\beta}| = 0 \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$$

m verschiedene Wurzeln $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ besitzt, durch eine lineare Transformation

$$y_\alpha = \sum_{\beta=1}^{m} h_{\alpha\beta}\,\mathfrak{y}_\beta \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

mit konstanten Koeffizienten $h_{\alpha\beta}$ in

$$\frac{1}{x}\frac{d\,\mathfrak{y}_\alpha}{d\,x} + \mathfrak{a}_\alpha \mathfrak{y}_\alpha + \sum_{\beta=1}^{m}\left(\frac{\mathfrak{a}_{\alpha\beta}^{(1)}}{x} + \cdots\right)\mathfrak{y}_\beta = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

übergeführt werden.

In $(\mathfrak{A}')$ ist $a_{12} = -1$, $a_{23} = -1$, $\ldots$, $a_{m-1,m} = -1$, während alle anderen $a_{\alpha\beta}$, für welche α einen der Werte $1, \ldots, m-1$ hat, verschwinden; ferner ist

$$a_{m1} = a_m,\ a_{m2} = a_{m-1}, \ldots, a_{m,m-1} = a_2,\ a_{mm} = a_1.$$

Jetzt sind $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ die Wurzeln der Gleichung m-ten Grades in s

$$\begin{vmatrix} s, & -1 & & & \\ & s, & -1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & s, & -1 \\ a_m, & a_{m-1}, & a_{m-2}, \ldots, & a_2, & a_1 + s \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn man zur ersten Spalte der Determinante die mit s multiplizierte zweite, die mit s^2 multiplizierte dritte usw., die mit s^{m-1} multiplizierte m-te Spalte addiert, enthält die umgeformte erste Spalte $m-1$ Nullen, während ihr m-tes Glied

$$a_m + a_{m-1}\,s + \cdots + a_2\,s^{m-2} + a_1\,s^{m-2} + s^m$$

ist und die Unterdeterminante dieses Gliedes den Wert $(-1)^m$ hat. Durch Nullsetzen der umgeformten Determinante erhält man *die charakteristische Gleichung*

$$s^m + a_1\,s^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\,s + a_m = 0$$

mit den voneinander verschiedenen Wurzeln $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$.

Wir kommen so auf ein Gleichungssystem

$$(\mathfrak{A}'') \qquad x^{-1}\frac{d\,\mathfrak{y}_\alpha}{d\,x} + \mathfrak{a}_\alpha \mathfrak{y}_\alpha + \sum_{\beta=1}^{m}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{\mathfrak{a}_{\alpha\beta}^{(\lambda)}}{x^\lambda}\,\mathfrak{y}_\beta = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

Durch die Substitution

$$\mathfrak{y}_\alpha = e^{-\frac{\mathfrak{a}_1 x^2}{2} - \mathfrak{a}_{11}^{(1)} x}\,\mathfrak{Y}_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

erhalten wir das System

$$(\mathfrak{A}''') \qquad x^{-1}\frac{d\,\mathfrak{Y}_\alpha}{d\,x} + \mathfrak{b}_\alpha \mathfrak{Y}_\alpha + \sum_{\beta=1}^{m}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{\mathfrak{b}_{\alpha\beta}^{(\lambda)}}{x^\lambda}\,\mathfrak{Y}_\beta = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

n welchem

$$\mathfrak{b}_1 = 0, \quad \mathfrak{b}_{11}^{(1)} = 0, \quad \mathfrak{b}_\alpha = \mathfrak{a}_\alpha - \mathfrak{a}_1 \qquad (\alpha = 2, \ldots, m)$$

st und welches demnach die in § 1 behandelte Form (A_1) hat. Die Rolle des lortigen $\mathfrak{a}_\alpha$ spielt jetzt $\mathfrak{b}_\alpha = \mathfrak{a}_\alpha - \mathfrak{a}_1$ $(\alpha = 2, \ldots, m)$.

Wir suchen das Differentialgleichungssystem $(\mathfrak{A}''')$ durch Laplacesche ntegrale

$$\mathfrak{Y}_\alpha = \int_0^\infty \mathfrak{B}_\alpha(z)\, e^{xz}\, dz = \int_0^\infty \mathfrak{W}_\alpha(t)\, e^{-xt}\, dt \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

u lösen, wobei

$$z = -t, \quad \mathfrak{B}_\alpha(z) = \mathfrak{B}_\alpha(-t) = \mathfrak{W}_\alpha(t)$$

st; der Integrationsweg sei in der z-Ebene $\arg z = \omega$, in der t-Ebene $\arg t = \arg(-z) = \pi + \omega$. In § 1 hatten wir für den Integrationsweg der len Differentialgleichungen (A_1) genügenden Laplaceschen Integrale die Bedingungen $\Re(a_\alpha e^{-2i\omega}) \leqq 0$ $(\alpha = 2, \ldots, m)$. Wenn wir a_α durch $\mathfrak{a}_\alpha - \mathfrak{a}_1$ $\alpha = 2, \ldots, m)$ und ω durch $\pi + \omega$ ersetzen, wobei $e^{-2i\omega}$ ungeändert bleibt, rhalten wir *für den Integrationsweg der den Gleichungen* $(\mathfrak{A}''')$ *genügenden Laplaceschen Integrale*

$$\mathfrak{Y}_\alpha = \int_0^\infty \mathfrak{B}_\alpha(z)\, e^{xz}\, dz \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

die Bedingungen

$$\Re\left((\mathfrak{a}_\alpha - \mathfrak{a}_1)\, e^{-2i\omega}\right) \leqq 0 \qquad (\alpha = 2, \ldots, m).$$

§ 4.

Die weitere Betrachtung knüpft an die *lineare Differentialgleichung*

$$(\mathfrak{B}) \qquad \mathfrak{P}_0 \frac{d^m y}{dx^m} + x\,\mathfrak{P}_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + x^{m-1}\,\mathfrak{P}_{m-1} \frac{dy}{dx} + x^m\,\mathfrak{P}_m\, y = 0$$

mit den in der Umgebung von $x = \infty$ *regulären Koeffizienten*

$$\mathfrak{P}_\mu = a_\mu + \frac{a_\mu^{(1)}}{x} + \frac{a_\mu^{(2)}}{x^2} + \cdots \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, m)$$

$a_0 \neq 0$) an.

Die Differentialgleichung $(\mathfrak{B})$ kann durch Division mit $x^m \mathfrak{P}_0$ auf die n § 3 behandelte Form $(\mathfrak{A})$ gebracht werden, freilich im allgemeinen unter Verkleinerung des Konvergenzradius. In den Formeln von § 3 müssen $a_1, \ldots, a_m$ durch $\frac{a_1}{a_0}, \ldots, \frac{a_m}{a_0}$ ersetzt werden. So kann auch die Differentialleichung $(\mathfrak{B})$ auf ein System von der Form (A) oder (A_1) in § 1 zurückgeführt verden.

Einer einfachen Wurzel α der charakteristischen Gleichung

$$a_0 \alpha^m + a_1 \alpha^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\alpha + a_m = 0$$

entspricht eine der Differentialgleichung $(\mathfrak{B})$ formal genügende Reihe

$$y = e^{\frac{\alpha x^2}{2} + \alpha' x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{x^{r+n}}.$$

Durch die Substitution

$$y = e^{\frac{\alpha x^2}{2} + \alpha' x} \mathfrak{y}$$

erhält man, wenn man die neue Veränderliche wieder mit $\mathfrak{y}$ bezeichnet, *die formale Reihe*

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{x^{r+n}}.$$

Dann ist

$$a_m = 0, \quad a_m^{(1)} = 0, \quad a_{m-1} \neq 0, \quad r = \frac{a_m^{(2)}}{a_{m-1}}.$$

Die so vereinfachte Differentialgleichung $(\mathfrak{B})$ bezeichnen wir mit $(\mathfrak{B}_1)$. Wir setzen den *Realteil von r positiv* voraus, was durch eine Substitution $y = x^q Y$ erreicht werden kann.

Wir wenden die Laplacesche Transformation in der Form

$$y = \int_0^{\infty} v(z)\, e^{xz}\, dz$$

an. Die mit x^{m-1} dividierte Differentialgleichung $(\mathfrak{B}_1)$ ist

$$\sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{a_\mu^{(\lambda)}}{x^{m-\mu+\lambda-1}} \frac{d^{m-\mu} y}{d x^{m-\mu}} = 0.$$

Dabei ist $a_\mu^{(0)} = a_\mu$; zu $\mu = m$ gehört $\lambda = 2, 3, \ldots$; das zu $\mu = m - 1$, $\lambda = 0$ gehörige Glied ist

$$a_{m-1} \frac{d y}{d x}.$$

Es ist

$$\frac{d^{m-\mu} y}{d x^{m-\mu}} = \int_0^{\infty} z^{m-\mu} v(z)\, e^{xz}\, dz,$$

$$\frac{1}{x} \frac{d^{m-\mu} y}{d x^{m-\mu}} = -\int_0^{\infty} \int_0^{z} z^{m-\mu} v(z)\, dz \cdot e^{xz}\, dz$$

unter der Bedingung

$$\Big[\int_0^z z^{m-\mu}\, v(z)\, dz\Big]_0^\infty = 0,$$

$$\frac{1}{x^\nu}\frac{d^{m-\mu}y}{d\,x^{m-\mu}} = (-1)^\nu \int_0^\infty \int_0^{z^{(\nu)}} z^{m-\mu}\, v(z)\, d\,z^\nu \cdot e^{xz}\, dz$$

unter den Bedingungen

$$\Big[\int_0^{z^{(\nu')}} z^{m-\mu}\, v(z)\, dz^{\nu'}\Big]_0^\infty = 0 \qquad (\nu' = 1, \ldots, \nu).$$

Wenn wir diese Ausdrücke unter Berücksichtigung der Formel

$$\int_0^{z^{(\nu)}} z^{m-\mu}\, v(z)\, dz^\nu = \int_0^z \frac{(z-\zeta)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\, \zeta^{m-\mu}\, v(\zeta)\, d\zeta$$

in die mit x^{m-1} dividierte Differentialgleichung $(\mathfrak{B}_1)$ einsetzen, erhalten wir die Integralgleichung

$$a_{m-1}\, z\, v(z) = \sum_{\lambda=2}^{\infty} a_m^{(\lambda)} \int_0^z \frac{(\zeta-z)^{\lambda-2}}{(\lambda-2)!}\, v(\zeta)\, d\zeta +$$

$$+ \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{m-1}^{(\lambda)} \int_0^z \frac{(\zeta-z)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}\, v(\zeta)\, d\zeta +$$

$$+ \sum_{\mu=0}^{m-2} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\mu^{(\lambda)} \int_0^z \frac{(\zeta-z)^{m-\mu+\lambda-2}}{(m-\mu+\lambda-2)!}\, \zeta^{m-\mu}\, v(\zeta)\, d\zeta.$$

Unter Einführung der beständig konvergenten Reihen

$$G_m(z) = \sum_{\lambda=2}^{\infty} a_m^{(\lambda)} \frac{(-z)^{\lambda-2}}{(\lambda-2)!},$$

$$G_{m-1}(z) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{m-1}^{(\lambda)} \frac{(-z)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!},$$

$$G_\mu(z) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\mu^{(\lambda)} \frac{(-z)^{m-\mu+\lambda-2}}{(m-\mu+\lambda-2)!} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, m-2)$$

haben wir *die Integralgleichung*

$(\mathfrak{Z}_1)$ $$a_{m-1}\, z\, v(z) = \int_0^z \sum_{\mu=0}^{m} G_\mu(z-\zeta)\, \zeta^{m-\mu}\, v(\zeta)\, d\zeta$$

als Laplacesche *Transformierte von* $(\mathfrak{B}_1)$. Der Integralgleichung genügt die (vielleicht von $z = 0$ abgesehen) *beständig konvergente Reihe*

$$v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n (-z)^{r+n-1}}{\Gamma(r+n)}.$$

Von nun an möge die Potenzreihe $\mathfrak{P}_\mu$ von $\frac{1}{x}$ mit dem Glied $\frac{a_\mu^{(p+\mu)}}{x^{p+\mu}}$ abbrechen:

$$\mathfrak{P}_\mu = a_\mu + \frac{a_\mu^{(1)}}{x} + \cdots + \frac{a_\mu^{(p+\mu)}}{x^{p+\mu}} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, m)$$

Wenn man

$$x^{p+\mu}\,\mathfrak{P}_\mu = P_\mu \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, m$$

setzt, ist

$$P_\mu = a_\mu x^{p+\mu} + a_\mu^{(1)} x^{p+\mu-1} + \cdots + a_\mu^{(p+\mu)} \quad (\mu = 0, 1, \ldots, m-1$$

eine ganze Funktion $(p+\mu)$-ten Grades; wegen $a_m = 0$, $a_m^{(1)} = 0$ ist

$$P_m = a_m^{(2)} x^{p+m-2} + \cdots + a_m^{(p+m)}.$$

Wir haben jetzt eine *Differentialgleichung vom Rang* 2 *mit ganzen rationalen Koeffizienten*

$$(\mathfrak{D}_1) \qquad P_0 \frac{d^m y}{dx^m} + P_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + P_{m-1} \frac{dy}{dx} + P_m y = 0,$$

deren Laplacesche Transformierte die Integralgleichung $(\mathfrak{C}_1)$ mit den ganzen Funktionen $(p+m-2)$-ten Grades

$$G_m(z) = \sum_{\lambda=2}^{p+m} a_m^{(\lambda)} \frac{(-z)^{\lambda-2}}{(\lambda-2)!},$$

$$G_{m-1}(z) = \sum_{\lambda=0}^{p+m-1} a_{m-1}^{(\lambda)} \frac{(-z)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!},$$

$$G_\mu(z) = \sum_{\lambda=0}^{p+m} a_\mu^{(\lambda)} \frac{(-z)^{m-\mu+\lambda-2}}{(m-\mu+\lambda-2)!} \quad (\mu = 0, 1, \ldots, m-2$$

ist. Durch $(m+p-1)$-malige Differentiation dieser Integralgleichung erhält man eine Differentialgleichung mit dem Glied höchster Ordnung

$$\frac{d^{p+m-1}}{dz^{p+m-1}} [a_{m-1} z\, v(z)],$$

welche in § 5 direkt hergeleitet wird. Die Herleitung der Differentialgleichung aus der für $\Re\, r > 0$ gültigen Integralgleichung zeigt, daß auch die Laplacesche transformierte Differentialgleichung für $\Re\, r > 0$ gilt.

t $\Re r \leqq 0$, so sei die positive Zahl q so gewählt, daß $\Re (r+q) > 0$ t. Man setzt

$$y = x^q Y$$

nd erhält die Differentialgleichung

$$P_0 x^m \frac{d^m Y}{d x^m} + (P_1 x^m + m q P_0 x^{m-1}) \frac{d^{m-1} Y}{d x^{m-1}} +$$

$$+\Big(P_2 x^m + (m-1) q P_1 x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} q(q-1) P_0 x^{m-2}\Big) \frac{d^{m-2} Y}{d x^{m-2}} + \cdots = 0.$$

iese ist für $q = 1$ durch x^{m-1} teilbar, für $q = 2$ durch x^{m-2} usw., für $= m-1$ durch x. Nunmehr wird die Laplacesche Transformation in er Form

$$Y = \int_0^\infty v(z)\, e^{xz}\, dz$$

ngewandt [1]).

§ 5.

Wir suchen *die Differentialgleichung*

$$P_0 \frac{d^m y}{d x^m} + P_1 \frac{d^{m-1} y}{d x^{m-1}} + \cdots + P_{m-1} \frac{d y}{d x} + P_m y = 0$$

it den ganzen rationalen Koeffizienten

$$P_\mu = a_\mu x^{p+\mu} + a_\mu^{(1)} x^{p+\mu-1} + \cdots + a_\mu^{(p+\mu)} \quad (\mu = 0, 1, \ldots, m),$$

obei $a_0 \neq 0$ sei, unabhängig von dem Bisherigen durch ein Laplacesches ntegral von der von Poincaré benutzten Form

$$y = \int_l v(z)\, e^{xz}\, dz$$

befriedigen, wo l ein passender Integrationsweg ist, für welchen das Integral nvergiert. Durch partielle Integration ergibt sich

$$x^\lambda \frac{d^\lambda y}{d x^\lambda} = (-1)^\lambda \int_l \frac{d^\lambda (z^\lambda v)}{d z^\lambda}\, e^{xz}\, dz$$

, λ ganze positive Zahlen einschließlich Null) unter den Bedingungen

$$\left[\frac{d^{\lambda'} (z^\lambda v)}{d z^{\lambda'}}\, e^{xz}\right]_l = 0 \qquad (\lambda' = 0, 1, \ldots, \lambda - 1).$$

---

[1]) Ähnlich kann die Differentialgleichung vom Rang 1 behandelt werden [vgl. ath. Zeitschr. **8** (1920), S. 106—107].

Demnach genügt das Laplacesche Integral der Differentialgleichung ($\mathfrak{D}$ wenn $v(z)$ *der Laplaceschen Transformierten*

$$(\mathfrak{E}) \quad \sum_{\mu=0}^{m}\Big[(-1)^{p+\mu}a_\mu\frac{d^{p+\mu}(z^{m-\mu}v)}{dz^{p+\mu}}+$$
$$+(-1)^{p+\mu-1}a_\mu^{(1)}\frac{d^{p+\mu-1}(z^{m-\mu}v)}{dz^{p+\mu-1}}+\cdots+a_\mu^{(p+\mu)}z^{m-\mu}v\Big]=0$$

genügt und die angegebenen Bedingungen erfüllt sind.

Wie in § 4 die Differentialgleichung ($\mathfrak{B}$) durch ($\mathfrak{B}_1$), so kann hier di Differentialgleichung ($\mathfrak{D}$) durch eine Differentialgleichung ($\mathfrak{D}_1$) ersetzt werden für welche $\alpha=0$, $\alpha'=0$ ist und welche durch eine Reihe

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n}{x^{r+n}}$$

formal befriedigt wird. In ($\mathfrak{D}_1$) ist

$$a_m=0,\quad a_m^{(1)}=0,\quad a_{m-1}\neq 0;\quad r=\frac{a_m^{(2)}}{a_{m-1}}.$$

Die Laplacesche Transformierte von ($\mathfrak{D}_1$) ist von der Form

$$(\mathfrak{E}_1)\quad Q_1\frac{d^{m+p-1}v}{dz^{p+m-1}}+\cdots+Q_m\frac{d^pv}{dz^p}+Q_{m+1}\frac{d^{p-1}v}{dz^{p-1}}+\cdots+Q_{m+p}v=0;$$
$$Q_1=-a_{m-1}z,\ Q_2=a_{m-2}z^2+\cdots,\ \cdots,\ Q_m=(-1)^m a_0 z^m+\cdots,$$
$$Q_{m+1}=(-1)^{m+1}a_0^{(1)}z^m+\cdots,\ \cdots,\ Q_{m+p}=(-1)^{m+p}a_0^{(p)}z^m+\cdots.$$

Ihre Unbestimmtheitsstelle $z=\infty$ vom Rang 2 hat die charakteristisch Gleichung

$$-a_{m-1}\beta^{p+m-1}+\cdots+(-1)^{m-1}a_1\beta^{p+1}+(-1)^m\beta^p=0$$

mit den Wurzeln $\beta=-\frac{1}{\alpha_2},\ldots,-\frac{1}{\alpha_m}$ und der p-fachen Wurzel $\beta=0$ wenn $0,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$a_0\alpha^m+a_1\alpha^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\alpha=0$$

von ($\mathfrak{D}_1$) sind. Die zur singulären Stelle $z=0$ von ($\mathfrak{E}_1$) gehörige deter minierende Gleichung hat die Wurzeln $0,1,\ldots,p+m-3$ und $r-1$ Zur letzteren Wurzel gehört, wenn r keine ganze Zahl ist, eine beständi konvergente Reihe

$$v=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n(-z)^{r+n-1}}{\Gamma(r+n)}.$$

Wir ziehen in der z-Ebene von $z=0$ ins Unendliche eine Halbgerade, welch mit der positiven reellen Achse den Winkel ω bildet; wir beschreiben un

$= 0$ einen kleinen Kreis, welcher die Halbgerade in $\mathfrak{q}$ schneidet. Dann soll der Integrationsweg l aus der von ∞ bis $\mathfrak{q}$ durchlaufenen Geraden, dem im positiven Sinn durchlaufenen Kreis und der von $\mathfrak{q}$ bis ∞ rückwärts durchlaufenen Geraden bestehen.

Der Schleifenweg l ist nur dann nicht anwendbar, wenn einer ganzen positiven Wurzel der determinierenden Gleichung ein logarithmenfreies v entspricht; dann wird l durch eine Gerade ersetzt, welche von $z = 0$ mit dem Argument ω ins Unendliche geht[2]).

Wir behandeln hier nur eine einfache *Differentialgleichung zweiter Ordnung*

$$\mathfrak{d}) \quad x\frac{d^2y}{dx^2} + (a_1x^2 + a_1'x + a_1'')\frac{dy}{dx} + (a_2x^3 + a_2'x^2 + a_2''x + a_2''')y = 0.$$

Die dem Integrationsweg l aufzuerlegenden Bedingungen leiten wir unabhängig von § 1 her.

Wie oben gezeigt wurde, kann man $a_2 = 0$, $a_2' = 0$, $a_1 \neq 0$ voraussetzen, so daß die Differentialgleichung

$$\mathfrak{d}_1) \quad x\frac{d^2y}{dx^2} + (a_1x^2 + a_1'x + a_1'')\frac{dy}{dx} + (a_2''x + a_2''')y = 0$$

vorliegt. Sie wird durch die Reihe

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{x^{r+n}}; \quad r = \frac{a_2''}{a_1},$$

ihre Laplacesche Transformierte

$$\mathfrak{e}_1) \quad a_1z\frac{d^2v}{dz^2} - (z^2 + a_1'z + a_2'' - 2a_1)\frac{dv}{dz} + ((a_1'' - 2)z + a_2''' - a_1')v = 0,$$

wenn r keine ganze Zahl ist, durch die beständig konvergente Reihe

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(-z)^{r+n-1}}{\Gamma(r+n)}$$

befriedigt. Zur Unbestimmtheitsstelle $z = \infty$ vom Rang 2 gehört die charakteristische Gleichung

$$a_1\beta^2 - \beta = 0$$

mit den Wurzeln $\beta_1 = \frac{1}{a_1}$, $\beta_2 = 0$; $(\mathfrak{e}_1)$ wird durch zwei Reihen

$$S_1 = e^{\frac{z^2}{2a_1} + \frac{a_1'}{a_1}z} \ldots, \quad S_2 = \ldots$$

formal befriedigt, wo an Stelle der Punkte Reihen von der Form stehen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{z^{s+n}}.$$

[2]) Vgl. Poincaré, Act. math. 8, S. 310–314 für den Rang 1.

Durch eine Substitution $x = \text{Const}\, x'$ erreicht man, daß $a_1 = 1$, also

$$S_1 = e^{\frac{z^2}{2} + a_1' z} \ldots$$

wird.

Wenn z mit einem gegebenen Argument ω ins Unendliche geht, sind zwei Integrale der Differentialgleichung $(\mathfrak{e}_1)$ so vorhanden, daß die asymptotischen Gleichungen gelten:

$$v_1 \sim S_1, \quad v_2 \sim S_2.$$

Wenn v die oben eingeführte beständig konvergente Reihe ist, hat man

$$v = c_1 v_1 + c_2 c_2,$$

wo c_1, c_2 in einem gewissen Intervall von ω konstant sind.

[Die Differentialgleichung $(\mathfrak{e}_1)$ besitzt[3]) vier ausgezeichnete Integrale $\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \varphi^{(3)}$, welche den folgenden asymptotischen Gleichungen genügen

$$\begin{aligned}
\varphi^{(0)} &\sim S_2 \text{ für } -\frac{3\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4},\\
\varphi^{(1)} &\sim S_1 \text{ für } -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{5\pi}{4},\\
\varphi^{(2)} &\sim S_2 \text{ für } \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{7\pi}{4},\\
\varphi^{(1)} &\sim S_1 \text{ für } \frac{3\pi}{4} < \arg z < \frac{9\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Demnach ist für jedes ω mindestens ein ausgezeichnetes Integral [$\varphi^{(0)}$ oder $\varphi^{(2)}$] welches durch S_2, und mindestens ein ausgezeichnetes Integral [$\varphi^{(1)}$ oder $\varphi^{(3)}$] welches durch S_1 asymptotisch dargestellt wird (und zwar so, daß ω im Innern desjenigen Intervalls von $\arg z$ liegt, in welchem die asymptotische Darstellung gilt.)]

Das Laplacesche Integral

$$\int_l v\, e^{x z}\, dz = \int_l (c_1 v_1 + c_2 v_2)\, e^{x z}\, dz$$

konvergiert dann und nur dann, wenn auf l im Unendlichen

$$\Re\left(\frac{z^2}{2}\right) = \Re\left(\frac{|z|^2}{2} e^{2 i \omega}\right) = \frac{|z|^2}{2} \cos 2\omega \leqq 0$$

oder

$$\cos 2\omega \leqq 0,$$

also

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} \leqq 2\omega \leqq \frac{3\pi}{2} \quad &\text{oder} \quad \frac{5\pi}{2} \leqq 2\omega \leqq \frac{7\pi}{2},\\
\frac{\pi}{4} \leqq \omega \leqq \frac{3\pi}{4} \quad &\text{oder} \quad \frac{5\pi}{4} \leqq \omega \leqq \frac{7\pi}{4}.
\end{aligned}$$

[3]) Nach Act. math. **23** (1900), S. 84 oder auch nach Journ. f. Math. **133** (1907) S. 67; vgl. die Figur Act. math. **23**, S. 184.

ist. Damit

$$\arg(xz) = \arg x + \omega$$

zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ liegt, nehmen wir $\arg x$ zwischen $\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$ und $\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ oder zwischen $\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4}$ und $\frac{3\pi}{4} - \frac{5\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ an, so daß das Laplacesche Integral und die daraus folgende asymptotische Darstellung für

$$-\frac{\pi}{4} < \arg x < \frac{5\pi}{4}$$

und für

$$-\frac{5\pi}{4} < \arg x < \frac{\pi}{4}$$

gilt.

Noch einfacher als die Differentialgleichung (𝔡) wäre die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (a_1 x + a_1')\frac{dy}{dx} + (a_2 x^2 + a_2' x + a_2'')\, y = 0,$$

welche auf die Hermitesche Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n\,y = 0$$

(n beliebig) zurückgeführt werden kann. Setzt man $x = \xi^2$, so hat man die Differentialgleichung mit linearen Koeffizienten

$$4\,\xi\frac{d^2y}{d\xi^2} + 2\,(1-\xi)\frac{dy}{d\xi} + ny = 0.$$

Die *Differentialgleichung dritter Ordnung*

$$\frac{d^3y}{dx^3} + (a_1 x + a_1')\frac{d^2y}{dx^2} + (a_2 x^2 + a_2' x + a_2'')\frac{dy}{dx} +$$
$$+ (a_3 x^3 + a_3' x^2 + a_3'' x + a_3''')\, y = 0$$

kann ebenso behandelt werden wie hier die Differentialgleichung (𝔡). Als Laplacesche Transformierte ergibt sich eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Integrale sich in bekannter Weise asymptotisch darstellen lassen. Aus dieser asymptotischen Darstellung erhält man zwei Bedingungen für die Existenz der Laplaceschen Integrale, welche der Differentialgleichung dritter Ordnung genügen.

Anmerkung über die Differentialgleichung (𝔡). Wenn in (𝔡) oder ($\mathfrak{d}_1$) $a_1 = 1$ gesetzt wird, ist das System ($\mathfrak{A}'$) in § 3:

$$\frac{1}{x}\frac{dy_1}{dx} - y_2 = 0,$$

$$\frac{1}{x}\frac{dy_2}{dx} + \left(1 + \frac{a_1'}{x} + \frac{a_1''+1}{x^2}\right) y_2 + \left(\frac{a_2''}{x^2} + \frac{a_2'''}{x^3}\right) y_1 = 0,$$

für

$$\mathfrak{y}_1 = y_1 + y_2, \quad \mathfrak{y}_2 = y_2$$

hat man das System $(\mathfrak{A}''')$:

$$\frac{1}{x}\frac{d\mathfrak{Y}_1}{dx} + \left(\frac{a_2''}{x^2} + \frac{a_2'''}{x^3}\right)\mathfrak{Y}_1 + \left(\frac{a_1'}{x} + \frac{a_1'' + 1 - a_2'''}{x^2} - \frac{a_2'''}{x^3}\right)\mathfrak{Y}_2 = 0,$$

$$\frac{1}{x}\frac{d\mathfrak{Y}_2}{dx} + \left(\frac{a_2''}{x^2} + \frac{a_2'''}{x^3}\right)\mathfrak{Y}_1 + \left(1 + \frac{a_1'}{x} + \frac{a_1'' + 1 - a_2'''}{x^2} - \frac{a_2'''}{x^3}\right)\mathfrak{Y}_2 = 0,$$

d. i. die Form (A_1) in § 1, so daß die dort mit a_2 bezeichnete Größe gleich 1 zu setzen ist. Die in § 1 dem Integrationsweg auferlegte Bedingung

$$\Re\,(a_2\, e^{-2i\omega}) \leqq 0$$

lautet also hier

$$\Re\,(e^{-2i\omega}) = \cos 2\omega \leqq 0,$$

womit sich die oben in § 5 gefundene Bedingung wieder ergeben hat.

§ 6[4]).

In dem Differentialgleichungssystem

$$(A) \qquad x^{-1}\frac{dy_\alpha}{dx} + a_\alpha y_\alpha + \sum_{\beta=1}^{m}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{a_{\alpha\beta}^{(\lambda)}}{x^\lambda}\, y_\beta = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

sei

$$a_1 = 0, \ldots, a_\mu = 0, a_{\mu+1} \neq 0, \ldots, a_m \neq 0.$$

Wir setzen die *Elementarteiler der Determinante*

$$\begin{vmatrix} a_{11}^{(1)} - s, \ldots, & a_{1\mu}^{(1)} \\ \cdots\cdots\cdots & \\ a_{\mu 1}^{(1)}, \quad \ldots, & a_{\mu\mu}^{(1)} - s \end{vmatrix}$$

als linear voraus; dann erreichen wir durch eine lineare Transformation von $y_1, \ldots, y_\mu$, daß

$$a_{\alpha\beta}^{(1)} = 0 \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, \mu;\ \alpha \neq \beta)$$

wird. Durch die Substitution

$$y_\alpha = e^{-a_{\lambda\lambda}^{(1)} x} z_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, m),$$

wo λ eine feste Zahl $1, \ldots, \mu$ ist, werden die Diagonalelemente $a_{11}^{(1)}, \ldots, a_{mm}^{(1)}$ um $a_{\lambda\lambda}^{(1)}$ vermindert, also $a_{\lambda\lambda}^{(1)}$ und etwaige weitere mit $a_{\lambda\lambda}^{(1)}$ übereinstimmende Diagonalelemente durch 0 ersetzt. Wenn wir die verschwindenden unter den Diagonalelementen $a_{11}, \ldots, a_{\mu\mu}$, deren Anzahl $\varkappa$ heißen möge, an den Anfang setzen, haben wir

$$a_{11}^{(1)} = 0, \ldots, a_{\varkappa\varkappa}^{(1)} = 0, \quad a_{\varkappa+1,\varkappa+1}^{(1)} \neq 0, \ldots, a_{\mu\mu}^{(1)} \neq 0.$$

[4]) Auf Anwendungen von § 6 wird in der Fußnote am Schluß von § 2 hingewiesen.

Das Differentialgleichungssystem (A), das wir in der Form

$$x^{-1}\frac{dy_\alpha}{dx}+\sum_{\beta=\mu+1}^{m}\frac{a^{(1)}_{\alpha\beta}}{x}y_\beta+\sum_{\beta=1}^{m}\frac{a^{(2)}_{\alpha\beta}}{x^2}y_\beta+\cdots=0 \qquad (\alpha=1,\ldots,\varkappa),$$

$$x^{-1}\frac{dy_\alpha}{dx}+\frac{a^{(1)}_{\alpha\alpha}}{x}y_\alpha+\sum_{\beta=\mu+1}^{m}\frac{a^{(1)}_{\alpha\beta}}{x}y_\beta+\sum_{\beta=1}^{m}\frac{a^{(1)}_{\alpha\beta}}{x^2}y_\beta+\cdots=0 \quad (\alpha=\varkappa+1,\ldots,\mu),$$

$$x^{-1}\frac{dy_\alpha}{dx}+a_\alpha y_\alpha+\sum_{\beta=1}^{m}\frac{a^{(1)}_{\alpha\beta}}{x}y_\beta+\sum_{\beta=1}^{m}\frac{a^{(2)}_{\alpha\beta}}{x^2}y_\beta+\cdots=0 \qquad (\alpha=\mu+1,\ldots,m)$$

schreiben, wird durch Reihen

$$y_\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_{\alpha n}}{x^{r+n}} \qquad (\alpha=1,\ldots,m)$$

formal befriedigt. Durch deren Einsetzung und Vergleichung der Koeffizienten von $\frac{1}{x^r}, \frac{1}{x^{r+1}}, \frac{1}{x^{r+2}}, \ldots, \frac{1}{x^{r+n}}$ erhält man die Gleichungen

$$(\mathfrak{g}_0) \qquad a_\alpha A_{\alpha 0}=0,$$

$$(\mathfrak{g}_1) \qquad a_\alpha A_{\alpha 1}+\sum_{\beta=1}^{m}a^{(1)}_{\alpha\beta}A_{\beta 0}=0,$$

$$(\mathfrak{g}_2) \qquad -rA_{\alpha 0}+a_\alpha A_{\alpha 2}+\sum_{\beta=1}^{m}a^{(1)}_{\alpha\beta}A_{\beta 1}+\sum_{\beta=1}^{m}a^{(2)}_{\alpha\beta}A_{\beta 0}=0,$$

. . . . . .

$$(\mathfrak{g}_n) \qquad -(r+n-2)A_{\alpha,n-2}+a_\alpha A_{\alpha n}+\sum_{\beta=1}^{m}a^{(1)}_{\alpha\beta}A_{\beta,n-1}+$$
$$+\sum_{\beta=1}^{m}a^{(2)}_{\alpha\beta}A_{\beta,n-2}+\cdots+\sum_{\beta=1}^{m}a^{(n)}_{\alpha\beta}A_{\beta 0}=0.$$

Aus den Gleichungen $(\mathfrak{g}_0)$ folgt

$$A_{\alpha 0}=0 \qquad (\alpha=\mu+1,\ldots,m).$$

Die Gleichungen $(\mathfrak{g}_1)$ sind für $\alpha=1,\ldots,\varkappa$ von selbst erfüllt, für $\alpha=\varkappa+1,\ldots,\mu$ lauten sie

$$a^{(1)}_{\alpha\alpha}A_{\alpha 0}=0,$$

so daß

$$A_{\alpha 0}=0 \qquad (\alpha=\varkappa+1,\ldots,\mu)$$

ist. Aus den Gleichungen $(\mathfrak{g}_1)$

$$a_\alpha A_{\alpha 1}+a^{(1)}_{\alpha 1}A_{10}+\cdots+a^{(1)}_{\alpha\varkappa}A_{\varkappa 0}=0$$

folgt

$$A_{\alpha 1}=-\frac{a^{(1)}_{\alpha 1}}{a_\alpha}A_{10}-\cdots-\frac{a^{(1)}_{\alpha\varkappa}}{a_\alpha}A_{\varkappa} \quad (\alpha=\mu+1,\ldots,m).$$

Die $\varkappa$ ersten Gleichungen $(\mathfrak{g}_2)$ lauten

$$-rA_{\alpha 0} + a^{(1)}_{\alpha,\mu+1} A_{\mu+1,1} + \cdots + a^{(1)}_{\alpha 1} A_{m1} + \\ + a^{(2)}_{\alpha 1} A_{10} + \cdots + a^{(2)}_{\alpha\varkappa} A_{\varkappa 0} = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, \varkappa)$$

oder, wenn man $A_{\mu+1,1}, \ldots, A_{m1}$ durch $A_{10}, \ldots, A_{\varkappa 0}$ ausdrückt und

$$H_{\alpha\beta} = a^{(2)}_{\alpha\beta} - \sum_{\gamma=\mu+1}^{m} \frac{a^{(1)}_{\alpha\gamma} a^{(1)}_{\gamma\beta}}{a_\gamma} \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, \varkappa)$$

setzt:

$$(H_{11} - r) A_{10} + \cdots + H_{1\varkappa} A_{\varkappa 0} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$H_{\varkappa 1} A_{10} + \cdots + (H_{\varkappa\varkappa} - r) A_{\varkappa 0} = 0,$$

während r der Gleichung $\varkappa$-ten Grades

$$\Delta(r) = \begin{vmatrix} H_{11} - r, & \ldots, & H_{1\varkappa} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ H_{\varkappa 1}, & \ldots, & H_{\varkappa\varkappa} - r \end{vmatrix} = 0$$

genügt.

Durch $A_{10}, \ldots, A_{\varkappa 0}$ ist nicht nur $A_{\alpha 1}$ $(\alpha = \mu + 1, \ldots, m)$, sondern vermöge $(\mathfrak{g}_1)$

$$a^{(1)}_{\alpha\alpha} A_{\alpha 1} + a^{(1)}_{\alpha,\mu+1} A_{\mu+1,1} + \cdots + a^{(1)}_{\alpha m} A_{m1} + \\ + a^{(2)}_{\alpha 1} A_{10} + \cdots + a^{(2)}_{\alpha\varkappa} A_{\varkappa 0} = 0 \quad (\alpha = \varkappa + 1, \ldots, \mu)$$

auch $A_{\alpha 1}$ $(\alpha = \varkappa + 1, \ldots, \mu)$, die Formel $(\mathfrak{g}_2)$ wird für $\alpha = \mu + 1, \ldots, m$:

$$a_\alpha A_{\alpha 2} + a^{(1)}_{\alpha 1} A_{11} + \cdots + a^{(1)}_{\alpha m} A_{m1} + a^{(2)}_{\alpha 1} A_{10} + \cdots + a^{(2)}_{\alpha\varkappa} A_{\varkappa 0} = 0;$$

da $A_{\varkappa+1,1}, \ldots, A_{m1}$ durch $A_{10}, \ldots, A_{\varkappa 0}$ ausgedrückt sind, hat man

$$A_{\alpha 2} = -\frac{a^{(1)}_{\alpha 1}}{a_\alpha} A_{11} - \cdots - \frac{a^{(1)}_{\alpha\varkappa}}{a_\alpha} A_{\varkappa 1} + \cdots \qquad (\alpha = \mu + 1, \ldots, m),$$

wo die weggelassenen Glieder von $A_{10}, \ldots, A_{\varkappa 0}$ abhängen. Die Gleichung $(\mathfrak{g}_3)$ wird für $\alpha = 1, \ldots, \varkappa$:

$$-(r+1) A_{\alpha 1} + a^{(1)}_{\alpha,\mu+1} A_{\mu+1,2} + \cdots + a^{(1)}_{\alpha m} A_{m2} + \\ + a^{(2)}_{\alpha 1} A_{11} + \cdots + a^{(2)}_{\alpha m} A_{m1} + a^{(3)}_{\alpha 1} A_{10} + \cdots + a^{(3)}_{\alpha\varkappa} A_{\varkappa 0} = 0;$$

$A_{\varkappa+1,1}, \ldots, A_{m1}$ hängen nur von $A_{10}, \ldots, A_{\varkappa 0}$ ab; nach Einsetzung von $A_{\mu+1,2}, \ldots, A_{m2}$ haben wir

$$-(r+1)A_{\alpha 1} + a^{(1)}_{\alpha,\mu+1}\Big(-\frac{a^{(1)}_{\mu+1,1}}{a_{\mu+1}}A_{11} - \cdots - \frac{a^{(1)}_{\mu+1,\varkappa}}{a_{\mu+1}}A_{\varkappa 1}\Big) +$$
$$+ \cdots + a^{(1)}_{\alpha m}\Big(-\frac{a^{(1)}_{m1}}{a_m}A_{11} - \cdots - \frac{a^{(1)}_{m\varkappa}}{a_m}A_{\varkappa 1}\Big) +$$
$$+ a^{(2)}_{\alpha 1}A_{11} + \cdots + a^{(2)}_{\alpha\varkappa}A_{\varkappa 1} + \cdots = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, \varkappa)$$

nter Weglassung der nur von $A_{10}, \ldots, A_{\varkappa 0}$ abhängigen Glieder. Zur Berechnung von $A_{11}, \ldots, A_{\varkappa 1}$ haben wir die Gleichungen

$$-(r+1)A_{\alpha 1} + H_{\alpha 1}A_{11} + \cdots + H_{\alpha\varkappa}A_{\varkappa 1} + \cdots = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, \varkappa)$$

der

$$(H_{11} - r - 1)A_{11} + \cdots + H_{1\varkappa}A_{\varkappa 1} + \cdots = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$H_{\varkappa 1}A_{11} + \cdots + (H_{\varkappa\varkappa} - r - 1)A_{\varkappa 1} + \cdots = 0,$$

sw.

Wenn die Gleichung $\Delta(r) = 0$ $\varkappa$ verschiedene Wurzeln $r_1, \ldots, r_\varkappa$ ohne ganzzahlige Differenz besitzt, berechnen sich für $y_1, \ldots, y_m$ $\varkappa$ verschiedene Reihensysteme von der angegebenen Form. Wir lassen auch mehrfache Wurzeln der Gleichung $\Delta(r) = 0$ zu, setzen aber voraus, daß *die Determinante* $\Delta(r)$ *nur lineare Elementarteiler* $r - r_1, \ldots, r - r_\varkappa$ *besitzt und daß zwischen* $r_1, \ldots, r_\varkappa$ *keine von Null verschiedene ganzzahlige Differenz besteht.*

Durch die Laplacesche Transformation

$$y_\alpha = \int_0^\infty w_\alpha(t)\, e^{-tx}\, dt \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

gehen die Differentialgleichungen (A) nach § 1 über in die Integralgleichungen

$$(B) \quad \int_0^t \tau\, w_\alpha(\tau)\, d\tau = a_\alpha\, w_\alpha(t) + \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t G_{\alpha\beta}(t-\tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

mit

$$G_{\alpha\beta}(t) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{a^{(\lambda)}_{\alpha\beta}\, t^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}, \quad G_{\alpha\beta}(0) = a^{(0)}_{\alpha\beta}.$$

Aus den Integralgleichungen (B) erhält man durch Einsetzung der Reihen

$$w_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{\alpha n}\, t^{r+n-1}}{\Gamma(r+n)} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

dieselben Rekursionsformeln für die $A_{\alpha n}$ wie oben aus den Differentialgleichungen (A).

Das System (B) geht durch Differentiation der zu $\alpha = 1, \ldots, \mu$ gehörigen Integralgleichungen über in

$$(\widetilde{\mathrm{B}}) \quad \begin{cases} t w_\alpha(t) = \sum_{\beta=\mu+1}^{m} a_{\alpha\beta}^{(1)} w_\beta(t) + \\ \qquad + \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t G'_{\alpha\beta}(t-\tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau \qquad (\alpha = 1, \ldots, \varkappa), \\ (t - a_{\alpha\alpha}^{(1)})\, w_\alpha(t) = \sum_{\beta=\mu+1}^{m} a_{\alpha\beta}^{(1)} w_\beta(t) + \\ \qquad + \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t G'_{\alpha\beta}(t-\tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau \qquad (\alpha = \varkappa+1, \ldots, \mu), \\ a_\alpha w_\alpha(t) = \int_0^t \tau\, w_\alpha(\tau)\, d\tau - \\ \qquad - \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t G_{\alpha\beta}(t-\tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau \qquad (\alpha = \mu+1, \ldots, m). \end{cases}$$

Wenn man in

$$\sum_{\beta=\mu+1}^{m} a_{\alpha\gamma}^{(1)} w_\gamma(t) \qquad (\alpha = 1, \ldots, \mu)$$

an Stelle von $w_\gamma(t)$ den Ausdruck

$$\frac{1}{a_\gamma} \int_0^t \tau\, w_\gamma(\tau)\, d\tau - \frac{1}{a_\gamma} \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t G_{\gamma\beta}(t-\tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau$$

setzt, erhält man Gleichungen

$$(\widetilde{\mathrm{C}}) \quad \begin{cases} t w_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t f_{\alpha\beta}(t,\tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau \qquad (\alpha = 1, \ldots, \varkappa), \\ w_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^{m} \int_0^t f_{\alpha\beta}(t,\tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau \qquad (\alpha = \varkappa+1, \ldots, m). \end{cases}$$

Schließt man die Geraden aus, welche von $t = a_{\alpha\alpha}^{(1)}$ $(\alpha = \varkappa+1, \ldots, \mu$ mit $\arg t = a_{\alpha\alpha}^{(1)}$ ins Unendliche gehen, so sind die Funktionen $f_{\alpha\beta}(t,\tau$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$ für alle endlichen Werte von t regulär, wenn τ auf der Geraden $0 \ldots t$ angenommen wird.

Die Integralgleichungen $(\widetilde{\mathrm{C}})$ haben die Form der Gleichungen (C) in Jahresber. **24**, S. 315—318; es spielt nur jetzt $\varkappa$ die Rolle des dortigen μ. Wenn wir aus unseren m Integralgleichungen $(\widetilde{\mathrm{C}})$ die Funktionen $w_{\varkappa+1}(t)$, $\ldots, w_m(t)$ eliminieren, erhalten wir $\varkappa$ Integralgleichungen

$$t w_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^{\varkappa} \int_0^t Q_{\alpha\beta}(t,\tau)\, w_\beta(\tau)\, d\tau \qquad (\alpha = 1, \ldots, \varkappa)$$

wo $Q_{\alpha\beta}(t,\tau)$ wie a. a. O., S. 316—317 gebildet und $Q_{\alpha\beta}(0,0) = f_{\alpha\beta}(0,0)$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, \varkappa)$ ist.

Wir haben für $\alpha, \beta = 1, \ldots, \varkappa$

$$f_{\alpha\beta}(t,\tau) = G'_{\alpha\beta}(t-\tau) - \sum_{\gamma=\mu+1}^{m} \frac{a^{(1)}_{\alpha\gamma}}{a_\gamma} G_{\gamma\beta}(t-\tau),$$

$$f_{\alpha\beta}(0,0) = a^{(2)}_{\alpha\beta} - \sum_{\gamma=\mu+1}^{m} \frac{a^{(1)}_{\alpha\gamma} a^{(1)}_{\gamma\beta}}{a_\gamma} = H_{\alpha\beta}.$$

Die Determinante

$$\Delta(s) = |f_{\alpha\beta}(0,0) - s\,\delta_{\alpha\beta}| = |H_{\alpha\beta} - s\,\delta_{\alpha\beta}| \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots, \varkappa)$$

soll lineare Elementarteiler $s - r_1, \ldots, s - r_\varkappa$ besitzen, ohne daß zwischen $r_1, \ldots, r_\varkappa$ eine von 0 verschiedene ganzzahlige Differenz besteht. Die Realteile von $r_1, \ldots, r_\varkappa$ seien positiv. Dann haben die Integralgleichungen $(\widetilde{C})$ $\varkappa$ linear unabhängige Lösungen

$$w_\alpha(t) = t^{r_\lambda - 1} \mathfrak{p}_{\alpha\lambda}(t) \quad (\alpha = 1, \ldots, m;\ \lambda = 1, \ldots, \varkappa),$$

wo $\mathfrak{p}_{\alpha\lambda}(t)$ im oben bezeichneten Gebiet regulär und $\mathfrak{p}_{\alpha\lambda}(0) = 0$ $(\alpha = \varkappa + 1, \ldots, m)$ ist. Wir können schreiben

$$w_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{\alpha n} t^{r_\lambda + n - 1}}{\Gamma(r_\lambda + n)} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

für $|t| < R$, wo R die kleinste der Größen $|a^{(1)}_{\varkappa+1,\,\varkappa+1}|, \ldots, |a^{(1)}_{\mu\mu}|$ ist; im Falle $\varkappa = \mu$ haben wir beständig (abgesehen von $t = 0$) konvergente Reihen.

Die Differentialgleichungen $(\widetilde{A})$ *werden in dem Gebiet* $\Re(x\,e^{i\omega}) > \sigma(\omega)$ *durch* Laplacesche *Integrale*

$$y_\alpha = \int_0^\infty w_\alpha(t)\, e^{-tx}\, dt \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

befriedigt, wenn der Integrationsweg $\arg t = \omega$ *die Bedingungen*

$$\Re(a_\alpha\, e^{-2i\omega}) < 0 \qquad (\alpha = \mu + 1, \ldots, m)$$

erfüllt.

Wie am Schluß von § 1 können diese Bedingungen durch

$$\Re(a_\alpha\, e^{-2i\omega}) \leqq 0 \qquad (\alpha = \mu + 1, \ldots, m)$$

ersetzt werden.

(Eingegangen am 4. September 1943.)

Die zulässigen Randbedingungen bei den singulären Eigenwertproblemen der mathematischen Physik.

(Gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung.)

Von

Franz Rellich in Dresden.

Das Eigenwertproblem einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form

$$-(p(x)\,u')' + q(x)\,u = \lambda\, k(x)\,u \qquad (l < x < L) \tag{1}$$

heißt *regulär*, wenn erstens das Intervall (l, L) endlich ist und wenn zweitens in dem abgeschlossenen Intervall $l \leqq x \leqq L$ gilt:

$$p(x),\ p'(x),\ q(x),\ k(x) \text{ stetig reell} \quad \text{und} \quad p(x) > 0,\ k(x) > 0. \tag{2}$$

Die Funktionen $u(x)$, auf welche der durch (1) gegebene Differentialoperator angewendet wird, also insbesondere die Eigenfunktionen, sind gewissen Bedingungen zu unterwerfen. Neben der Forderung, $u(x)$ soll in $l \leqq x \leqq L$ eine komplexwertige, zweimal stetig differenzierbare Funktion sein, sind das Randbedingungen von der Art, daß der Operator in dem so eingeschränkten Bereich von Funktionen genau eine Spektralzerlegung besitzt; solche „zulässigen" Randbedingungen[1]) sind z. B.

$$\begin{aligned} u(l)\cos\alpha + u'(l)\sin\alpha &= 0 \qquad (0 \leqq \alpha < \pi), \\ u(L)\cos\beta + u'(L)\sin\beta &= 0 \qquad (0 \leqq \beta < \pi). \end{aligned} \tag{3}$$

Das Eigenwertproblem (1) heißt *singulär*, wenn $l = -\infty$ bzw. $L = +\infty$ zugelassen wird und wenn die Voraussetzungen (2) nur mehr im offenen Intervall $l < x < L$ gemacht werden. Die Theorie dieser singulären Eigenwertprobleme ist von H. Weyl gegeben worden[2]). Die Bedingungen, welche nach Weyl für die Funktionen $u(x)$ zu fordern sind, lauten

[1]) Nach einer Bezeichnungsweise von K. Friedrichs. Vgl. die in Anm. 4 genannte Arbeit.

[2]) H. Weyl, Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen. Math. Ann. 68 (1910), S. 220—269. Außerdem Göttinger Nachrichten 1909, S. 37—63 und 1910, S. 442—467. Eine ausführliche Behandlung bei M. H. Stone, Linear transformations in Hilbert space. New York 1932.

I. $u(x)$ komplexwertig und zweimal stetig differenzierbar,

II. $\int_l^L k|u|^2\,dx < \infty$ und $\int_l^L \frac{1}{k}\,|-(p\,u')'+q\,u|^2\,dx < \infty$.

ezeichnet man die Gesamtheit der in $l < x < L$ erklärten (komplexwertigen) nktionen $u(x)$, für welche $\int_l^L k|u|^2\,dx$ im Sinne von Lebesgue existiert und dlich ist als den Hilbertschen *Raum* $\mathfrak{H}$ mit dem inneren Produkt $(u, v) = \int_l^L k u\bar{v}\,dx$, dann besagt die Bedingung II offenbar gerade, daß u nd Au in $\mathfrak{H}$ liegen sollen, wenn man unter A den zu (1) gehörigen Differentialperator bezeichnet: $Au = \frac{1}{k}\{-(pu')' + qu\}$. Die Bedingungen II sind so sogar *notwendig* — jedenfalls dann, wenn man die zu (1) gehörige Eigenertaufgabe als die Spektralzerlegung eines Operators im Hilbertschen aum auffassen will.

Weyl zeigt ferner: Wenn bei $x = l$ (bzw. bei $x = L$) der „Grenzpunktll" vorliegt[3]), dann sind über (4) hinaus keine weiteren Bedingungen, insondere keine Randbedingungen bei $x = l$ (bzw. bei $x = L$) zu stellen. a man bei den singulären Eigenwertaufgaben, welche in der mathematischen ıysik vorkommen, bequem entscheiden kann, ob an den Intervallenden der renzpunkt- oder der Grenzkreisfall vorliegt, ist damit im Grenzpunktfall e Frage nach den zulässigen Randbedingungen in befriedigendster Weise antwortet.

Wenn bei $x = l$ (bzw. bei $x = L$) der Grenzkreisfall vorliegt, dann muß ch Weyl über (4) hinaus bei $x = l$ (bzw. bei $x = L$) noch eine Randdingung gestellt werden, und zwar gibt es (analog zum regulären Fall) eine ıendliche Schar möglicher Randbedingungen. Einen vollständigen Überick über die Gesamtheit aller möglichen Randbedingungen gibt M. H. Stone

[3]) Bei $x = l$ (bzw. $x = L$) liegt der *Grenzpunktfall* vor, wenn (1) mit irgendeinem llen oder komplexen λ eine Lösung besitzt, für die $\int_l^{x_0} k|u|^2\,dx = \infty$ (bzw. $|u|^2\,dx = \infty$) ausfällt, $l < x_0 < L$; es liegt der *Grenzkreisfall* vor, wenn mit endeinem reellen oder komplexen λ für alle Lösungen $u(x)$ von (1) gilt $\int_l^{x_0} k|u|^2 dx < \infty$ zw. $\int_{x_0}^L k|u|^2\,dx < \infty$). Weyl beweist die Alternative: Bei $x = l$ (bzw. bei $x = L$) gt entweder der Grenzpunktfall oder der Grenzkreisfall vor.

in seinem Buche[2]). Diese Randbedingungen sind indes — auch in der vo STONE verbesserten Form — nicht direkt verwendbar: selbst in dem Spezialfa des regulären Eigenwertproblems ist eine verhältnismäßig mühsame Reduktio erforderlich, um sie auf die Form (3) zu bringen.

Solange man über das Verhalten der Koeffizienten $p(x)$, $q(x)$, $k(x)$ a den Intervallenden keinerlei Voraussetzungen macht, dürfte die von STON gegebene Formulierung der Randbedingungen im Grenzkreisfall kaum wesen lich verbessert werden können. Bei den singulären Eigenwertproblemen, d in der mathematischen Physik eine Rolle spielen, liegt indes, soviel ich seh an einer Stelle, bei welcher der Grenzkreisfall gegeben ist, in der Regel auc eine Stelle der Bestimmtheit vor. Ich setze daher in dieser Arbeit voraus daß ein Intervallende, bei dem der Grenzkreisfall vorliegt, zugleich eine Stell der Bestimmtheit für die Differentialgleichung (1) ist und gebe unter diese Voraussetzung zulässige Randbedingungen an, die ebenso handlich sind wi die Randbedingungen (3) im regulären Fall [vgl. insbesondere die Formulierun am Ende von § 2][4]).

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß am linke Intervallende der Grenzkreisfall gegeben ist und wählen $l = 0$; die Stell $x = 0$ soll also für die Differentialgleichung eine Stelle der Bestimmtheit sei Für das rechte Intervallende $x = L$ könnte man offen lassen, ob der Grenz kreis- oder der Grenzpunktfall eintritt. Da indes im Grenzpunktfall b $x = L$ gegenüber WEYL nichts Neues zu beweisen wäre, und, falls $x =$ eine singuläre Stelle mit Grenzkreisfall wäre, nur das an der Stelle $x =$ Gesagte wiederholt werden müßte, setzen wir das Eigenwertproblem bei $x =$ regulär voraus, verlangen also insbesondere endliches L. Auf diese Weis wird die ganze Arbeit unabhängig von den Arbeiten von WEYL und STON lesbar.

Demnach sind die genauen Voraussetzungen über das in dieser Arbe behandelte Eigenwertproblem diese: Für die Koeffizienten der Differentia gleichung

$$-(p(x)u')' + q(x)u = \lambda k(x)u \tag{5}$$

soll gelten:

---

[4]) K. FRIEDRICHS gibt in der Arbeit „Über die ausgezeichnete Randbedingun in der Spektraltheorie der halbbeschränkten gewöhnlichen Differentialoperator zweiter Ordnung", Math. Ann. **112** (1936), S. 1—23 gleichfalls eine bequem verwendba Randbedingung unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen über die Fun tionen $p(x)$, $q(x)$, $k(x)$. Die Tendenz dieser Arbeit ist aber eine andere als die d vorliegenden, da nicht die ganze Schar der möglichen Randbedingungen angegeb wird, sondern nur eine einzige, eben die „ausgezeichnete Randbedingung".

1) $p(x)$, $p'(x)$ reell und stetig, $q(x)$, $k(x)$ reell und stückweise stetig[5] in $0 < x \leqq L$.

2) $p(x) > 0$, $k(x) > 0$ in $0 < x \leqq L$.

3) Die Stelle $x = 0$ ist für jeden Wert von λ eine Stelle der Bestimmtheit[6].

4) Bei $x = 0$ liegt der Grenzkreisfall vor, d. h. es gibt ein (komplexes) λ_0, so daß für alle Lösungen von (5) mit $\lambda = \lambda_0$ gilt $\int_0^L k\,|u|^2 dx < \infty$.

Die Voraussetzungen 1) bis 4) werden in der ganzen Arbeit zugrunde elegt und nicht wiederholt. Desgleichen soll in der ganzen Arbeit unter Lösung" der Differentialgleichung (5) immer nur eine Funktion mit den igenschaften

5) $u(x)$ komplexwertig; u, u' stetig; u'' stückweise stetig in $0 < x \leqq L$

erstanden werden.

§ 1.

Stelle der Bestimmtheit und Grenzkreisfall.

Da die Stelle $x = 0$ für die Differentialgleichung (5) eine Stelle der estimmtheit ist, wird der analytische Charakter der Lösungen von (5) in er Umgebung von $x = 0$ durch die charakteristischen Exponenten gegeben. a zugleich der Grenzkreisfall vorliegt, läßt sich zeigen — und darauf beruht ie Möglichkeit der ganzen folgenden Darstellung —, daß sowohl die charak-eristischen Exponenten als auch gewisse Anfangskoeffizienten eines geeignet isgesuchten Fundamentalsystems von λ unabhängig sind. Dem Nachweis ieser Tatsache dient dieser Paragraph.

Die Differentialgleichung (5) oder $u'' + \frac{p'}{p} u' + \lambda \frac{k}{p} u - \frac{q}{p} u = 0$ hat $= 0$ für jeden Wert der (komplexen) Konstanten λ offenbar genau dann ur Stelle der Bestimmtheit, wenn

$$\frac{p'}{p} = \sigma x^{-1} + \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots, \quad \frac{q}{p} = \beta_{-2} x^{-2} + \beta_{-1} x^{-1} + \cdots,$$

$$\frac{k}{p} = \gamma_{-2} x^{-2} + \gamma_{-1} x^{-1} + \cdots$$

[5]) Eine Funktion heißt in $0 < x \leqq L$ stückweise stetig, wenn sie dort bis auf end-h viele endliche Sprungstellen stetig ist. Für die physikalische Anwendung ist es ufig bequem, unstetiges $q(x)$ benutzen zu dürfen.

[6]) Der analytische Charakter, der dadurch für p, q, k vorausgesetzt wird, soll türlich nur in einer Umgebung von $x = 0$ gefordert werden.

ist, wobei die Reihen reelle Koeffizienten haben und in einer Umgebung v $x = 0$ konvergieren[7]). Es wird also

$$\begin{aligned} p(x) &= x^{\sigma}(p_0 + p_1 x + \cdots) \\ q(x) &= x^{\sigma-2}(q_0 + q_1 x + \cdots) \\ k(x) &= x^{\sigma-2}(k_0 + k_1 x + \cdots) \end{aligned} \tag{7}$$

mit reellem σ, $p_0, p_1, \ldots, q_0, q_1, \ldots, k_0, k_1, \ldots$. Es ist $p_0 \neq 0$. Da $k($ nach Voraussetzung nicht identisch verschwindet, gibt es eine ganze Zahl derart, daß

$$k_g \neq 0 \text{ und } k_j = 0 \quad \text{für } j < g. \tag{8}$$

Die Differentialgleichung (5) bekommt die Form

$$\Big(\sum_{j=0}^{\infty} p_j x^j\Big) x^2 u'' + \Big(\sum_{j=0}^{\infty} p_j (j+\sigma) x^j\Big) x u' + \\ + \Big(\sum_{j=0}^{\infty} (\lambda k_j - q_j) x^j\Big) u = 0 \tag{9}$$

und die Gleichung für die charakteristischen Exponenten heißt $p_0 \varrho(\varrho - 1) +$ $+ p_0 \sigma \varrho + \lambda k_0 - q_0 = 0$ oder

$$\varrho^2 + (\sigma - 1)\varrho + \lambda \frac{k_0}{p_0} - \frac{q_0}{p_0} = 0. \tag{10}$$

Die beiden Wurzeln dieser quadratischen Gleichung seien ϱ_1 und ϱ_2. Es s

(11) $r_1 = Re\, \varrho_1$, $r_2 = Re\, \varrho_2$, $r_1 \geqq r_2$; wenn $r_1 = r_2$, dann $Im\, \varrho_1 \geqq Im\, \varrho$

also $\varrho_1 + \varrho_2 = 1 - \sigma = r_1 + r_2$. Dann gibt es bekanntlich eine Lösun von (5), welche in einer Umgebung von $x = 0$ die Form hat

$$\omega(x) = x^{\varrho_1}(\omega_0 + \omega_1 x + \cdots); \quad \omega_0 = 1, \tag{12}$$

und eine zweite Lösung von der Form

$$\psi(x) = x^{\varrho_2}(\psi_0 + \psi_1 x + \cdots) + c\,\omega(x) \log x \tag{13}$$

mit

$$\begin{aligned} &\psi_0 = 1, \quad c = 0, && \text{wenn } \varrho_1 - \varrho_2 \text{ nicht ganz} \\ &\psi_0 = 0, \quad c = 1, && \text{wenn } \varrho_1 - \varrho_2 = 0 \\ &\psi_0 = 1, \quad \psi_n = 0, && \text{wenn } \varrho_1 - \varrho_2 = n \text{ ganz positiv.} \end{aligned} \tag{14}$$

Wir nennen $\psi(x)$, $\omega(x)$ das genormte Fundamentalsystem der Differentia gleichung (5).

---

[7]) Vgl. Anm. 6.

Da bei $x = 0$ der Grenzkreisfall vorliegt, ist mit einem geeigneten (kom-
plexen) $\lambda = \lambda_0$ und genügend kleinem $\delta > 0$ jedenfalls $\int_0^\delta k|\psi|^2 dx < \infty$.
Also wegen $k(x) = x^{\sigma-2+g}(k_g + k_{g+1}x + \cdots), k_g \neq 0$ auch $\int_0^\delta x^{\sigma-2+g} x^{2r_2} dx$
$< \infty$, d. h. $\sigma - 2 + g + 2r_2 > -1$, also

15) $$g > r_1 - r_2.$$

Auf jeden Fall ist also $g > 0$, $k_0 = 0$. Daher sind die charakteristischen Exponenten ϱ_1 und ϱ_2 von λ unabhängig. Eine Folge davon ist, daß nicht nur für $\lambda = \lambda_0$, sondern für jedes (komplexe) λ sämtliche Lösungen $u(x)$ von (5) die Beziehung $\int_0^L k|u|^2 dx < \infty$ erfüllen[8]).

Zur Bestimmung der Koeffizienten $\omega_0, \omega_1, \ldots; \psi_0, \psi_1, \ldots; c$ gehen wir zunächst mit dem Ansatz (12) in die Gleichung (9) ein und erhalten

16) $$\sum_{\nu=0}^{\mu} [p_{\mu-\nu}(\varrho_1+\nu)(\varrho_1+\nu-1) + p_{\mu-\nu}(\mu-\nu+\sigma)(\varrho_1+\nu) + \\ + \lambda k_{\mu-\nu} - q_{\mu-\nu}]\omega_\nu = 0; \quad \mu = 0, 1, 2, \ldots.$$

Für $\mu = 0$ ergibt sich wegen $\omega_0 = 1$ die Gleichung (10) mit $\varrho = \varrho_1$; für $\mu = 1, 2, \ldots$ wird

17) $$[p_0(\varrho_1+\mu)(\varrho_1+\mu-1) + p_0\sigma(\varrho_1+\mu) + \lambda k_0 - q_0]\omega_\mu + \\ + \sum_{\nu=0}^{\mu-1} [p_{\mu-\nu}(\varrho_1+\nu)(\varrho_1+\nu-1) + p_{\mu-\nu}(\mu-\nu+\sigma)(\varrho_1+\nu) + \\ + \lambda k_{\mu-\nu} - q_{\mu-\nu}]\omega_\nu = 0.$$

Also sind die $\omega_0 = 1, \omega_1, \omega_2, \ldots$ eindeutig bestimmt und wegen $k_0 = k_1 = \cdots = k_{g-1} = 0$ ist $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{g-1}$ von λ unabhängig.

Wenn $\varrho_1 - \varrho_2$ nicht ganz ist, dann gelten sofort die Gleichungen, die man aus (16) und (17) erhält, indem man ϱ_1 durch ϱ_2 und ω_ν durch ψ_ν ersetzt. Es sind in diesem Falle die $\psi_0 = 1, \psi_1, \psi_2, \ldots$ eindeutig bestimmt und $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{g-1}$ von λ unabhängig. Da ϱ_1 und ϱ_2 konjugiertkomplex sind, wenn sie nicht reell sind, so ist in diesem Falle $\psi_0 = \bar{\omega}_0$, $\psi_1 = \bar{\omega}_1, \ldots, \psi_{g-1} = \bar{\omega}_{g-1}$.

Wenn $\varrho_1 - \varrho_2 = n$ ganz, dann

$$\sum_{j,\nu=0}^{\infty} [p_j(\varrho_2+\nu)(\varrho_2+\nu-1) + p_j(j+\sigma)(\varrho_2+\nu) + \lambda k_j - q_j]\psi_\nu x^{\varrho_2+j+\nu} + \\ + c\sum_{j,\nu=0}^{\infty} [-p_j + 2p_j(\varrho_1+\nu) + p_j(j+\sigma)]\omega_\nu x^{\varrho_1+\nu+j} = 0$$

[8]) Das ist ein Spezialfall eines allgemeinen Satzes von WEYL über den Grenzkreisfall, der die in Anm. 3 gegebene Definition überhaupt erst rechtfertigt.

oder

$$(18)\quad \sum_{\mu=0}^{\infty} x^{\varrho_2+\mu} \sum_{\nu=0}^{\mu} [p_{\mu-\nu}(\varrho_2+\nu)(\varrho_2+\nu-1)+p_{\mu-\nu}(\mu-\nu+\sigma)(\varrho_2+\nu)+$$
$$+\lambda k_{\mu-\nu}-q_{\mu-\nu}]\psi_\nu + c\sum_{\mu=0}^{\infty} x^{\varrho_1+\mu}\sum_{\nu=0}^{\mu}[-1+2(\varrho_1+\nu)+\mu-\nu+\sigma]p_{\mu-\nu}\omega_\nu = 0$$

Sei zunächst $n=0$, also $\psi_0=0$, $c=1$. Dann wird

$$(19)\quad \sum_{\nu=0}^{\mu}[p_{\mu-\nu}(\varrho_2+\nu)(\varrho_2+\nu-1)+p_{\mu-\nu}(\mu-\nu+\sigma)(\varrho_2+\nu)+$$
$$+\lambda k_{\mu-\nu}-q_{\mu-\nu}]\psi_\nu+\sum_{\nu=0}^{\mu}[-1+2\varrho_2+\mu+\nu+\sigma]p_{\mu-\nu}\omega_\nu=0$$

Für $\mu=0$ wird $-1+2\varrho_2+\sigma=0$, was nichts Neues liefert. Für $\mu=1,2,\ldots$ erhält man

$$(20)\quad [p_0(\varrho_2+\mu)(\varrho_2+\mu-1)+p_0\sigma(\varrho_2+\mu)+\lambda k_0-q_0]\psi_\mu+$$
$$+\sum_{\nu=0}^{\mu-1}[p_{\mu-\nu}(\varrho_2+\nu)(\varrho_2+\nu-1)+p_{\mu-\nu}(\mu-\nu+\sigma)(\varrho_2+\nu)+$$
$$+\lambda k_{\mu-\nu}-q_{\mu-\nu}]\psi_\nu+\sum_{\nu=0}^{\mu}[-1+2\varrho_2+\mu+\nu+\sigma]p_{\mu-\nu}\omega_\nu=0$$

Also $\psi_0=0$, $\psi_1,\psi_2,\ldots$ eindeutig bestimmt und $\psi_0,\psi_1,\ldots,\psi_{g-1}$ von λ unabhängig. Ist schließlich $\varrho_1-\varrho_2=n>0$ ganz, dann $\psi_0=1$, $\psi_n=0$. Aus (18) folgt

$$(21)\quad \sum_{\nu=0}^{\mu}[p_{\mu-\nu}(\varrho_2+\nu)(\varrho_2+\nu-1)+p_{\mu-\nu}(\mu-\nu+\sigma)(\varrho_2+\nu)+$$
$$+\lambda k_{\mu-\nu}-q_{\mu-\nu}]\psi_\nu=0,\quad \mu=0,1,\ldots,n-1$$

$$(22)\quad \sum_{\nu=0}^{n}[p_{n-\nu}(\varrho_2+\nu)(\varrho_2+\nu-1)+p_{n-\nu}(n-\nu+\sigma)(\varrho_2+\nu)+$$
$$+\lambda k_{n-\nu}-q_{n-\nu}]\psi_\nu+c[-1+2(\varrho_2+n)+\sigma]p_0\omega_0=0$$

$$(23)\quad \sum_{\nu=0}^{\mu}[p_{\mu-\nu}(\varrho_2+\nu)(\varrho_2+\nu-1)+p_{\mu-\nu}(\mu-\nu+\sigma)(\varrho_2+\nu)+$$
$$+\lambda k_{\mu-\nu}-q_{\mu-\nu}]\psi_\nu+c\sum_{\nu=0}^{\mu-n}[-1+2(\varrho_2+n+\nu)+$$
$$+\mu-n-\nu+\sigma]p_{\mu-n-\nu}\omega_\nu=0,\quad \mu=n+1,n+2,\ldots$$

Aus (21) sieht man, daß $\psi_0,\psi_1,\ldots,\psi_{n-1}$ eindeutig bestimmt und (wegen $g>n$) von λ unabhängig ist, aus (22) folgt wegen $\psi_n=0$ und $-1+2\varrho_2+$ $+2n+\sigma=-1+2\varrho_2+2n+1-\varrho_1-\varrho_2=n>0$, daß c eindeutig bestimmt ist und nicht von λ abhängt. Aus (23) folgt, daß $\psi_{n+1},\psi_{n+2},\ldots$ eindeutig bestimmt ist. Wenn $g>n+1$, dann ist $\psi_{n+1},\psi_{n+2},\ldots$ ψ_{g-1} von λ unabhängig.

In allen Fällen sind die durch (12), (13) und (14) festgelegten Lösungen $\omega(x)$ und $\psi(x)$ eindeutig bestimmt. Die Zahlen $\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_{g-1};\psi_0,\psi_1,\ldots$

ψ_{g-1}; c sind von λ unabhängig, sie sind reell, wenn ϱ_1 und ϱ_2 reell sind nd es ist $\psi_0 = \overline{\omega}_0$, $\psi_1 = \overline{\omega}_1, \ldots, \psi_{g-1} = \overline{\omega}_{g-1}$, wenn ϱ_1, ϱ_2 nicht reell nd.

Es sei $\Omega_g(x)$ derjenige Abschnitt von $\omega(x)$, in dem alle Potenzen weglassen sind, deren Exponenten einen Realteil größer als $r_2 + g - 1$ betzen[9]), also

$$\Omega_g(x) = x^{\varrho_1}(\omega_0 + \omega_1 x + \cdots + \omega_{h-1} x^{h-1}),$$

obei die Zahl h erklärt ist durch $r_2 + g - 1 \leqq r_1 + h - 1 < r_2 + g$. ffenbar $1 \leqq h \leqq g$. Ferner setzen wir

$$\Psi_g(x) = x^{\varrho_2}(\psi_0 + \psi_1 x + \cdots + \psi_{g-1} x^{g-1}) + c\,\Omega_g(x) \log x.$$

ie beiden Funktionen $\Psi_g(x)$ und $\Omega_g(x)$ sind von λ unabhängig.

Jede Lösung $u(x)$ der Differentialgleichung (5) läßt sich mit geeigneten omplexen) Zahlen u_0 und u_1 in einer rechtsseitigen Umgebung von $x = 0$ chreiben in der Form

$$u(x) = u_0 \Psi_g(x) + u_1 \Omega_g(x) + O_2(x^{r_2+g} |\log x|),$$

enn wir unter $O_2(x^{r_2+g} |\log x|)$ eine Funktion $w(x)$ verstehen, die in einer echtsseitigen Umgebung von $x = 0$ zweimal stetig differenzierbar ist und ir die

$$w(x) = O(x^{r_2+g} |\log x|), \quad w'(x) = O(x^{r_2+g-1} |\log x|),$$
$$w''(x) = O(x^{r_2+g-2} |\log x|)$$

lt, unter O das Landausche Symbol bei Annäherung an $x = 0$ von rechts erstanden. In der Tat ist

$$u(x) = u(x) - u_0 \Psi_g(x) - u_1 \Omega_g(x) = u_0(\psi_g x^{\varrho_2+g} + \psi_{g+1} x^{\varrho_2+g+1} + \cdots) +$$
$$+ u_0 c\,(\omega_h x^{\varrho_1+h} + \omega_{h+1} x^{\varrho_1+h+1} + \cdots) \log x + u_1(\omega_h x^{\varrho_1+h} + \omega_{h+1} x^{\varrho_1+h+1} + \cdots),$$

oraus die Behauptung abgelesen werden kann.

Die Gesamtheit der Funktionen $u(x)$, welche die Darstellung (26) getatten (ohne notwendig Lösungen der Differentialgleichung zu sein), wollen ir $\mathfrak{D}$ nennen, also

Definition. $\mathfrak{D}$ *ist die Gesamtheit aller komplexwertigen* $u(x)$ *mit den igenschaften*

1. *In* $0 < x \leqq L$ *ist* $u(x)$, $u'(x)$ *stetig,* $u''(x)$ *stückweise*[5]) *stetig.*

2. *In einer rechtsseitigen Umgebung von* $x = 0$ *ist* $u(x) = u_0 \Psi_g(x) + u_1 \Omega_g(x) + O_2(x^{r_2+g} |\log x|)$ *mit geeigneten Konstanten* u_0, u_1.

[9]) Der Grund hierzu wird unten klar: Für Potenzen $f(x) = x^{r_2+g}$ und für höhere tenzen ist $\int_0^L \frac{1}{k} |(pf')' - qf|^2\, dx < \infty$.

Wenn $u(x)$ eine Funktion aus $\mathfrak{D}$ ist, dann lassen sich die Zahlen u_0 und u_1 von (26) aus $u(x)$ folgendermaßen herleiten:

$$u_0 = \lim_{x \to 0} \frac{u(x)}{x^{\varrho_2}}, \quad u_1 = \lim_{x \to 0} \frac{u(x) - u_0 \Psi_g(x)}{x^{\varrho_1}}; \quad \varrho_1, \varrho_2 \text{ reell verschieden,}$$

$$(28) \qquad u_0 = \lim_{x \to 0} \frac{u(x)}{x^{\varrho_2} \log x}, \quad u_1 = \lim_{x \to 0} \frac{u(x) - u_0 \Psi_g(x)}{x^{\varrho_1}}; \quad \varrho_1 = \varrho_2,$$

$$u_0 = \lim_{x \to 0} \frac{\varrho_1 u(x) - x u'(x)}{(\varrho_1 - \varrho_2) x^{\varrho_2}}, \quad u_1 = \lim_{x \to 0} \frac{\varrho_2 u(x) - x u'(x)}{(\varrho_2 - \varrho_1) x^{\varrho_1}}; \quad \varrho_1, \varrho_2 \text{ nicht reell.}$$

Die ersten beiden Zeilen können direkt aus (26) abgelesen werden. Zur Her leitung der letzten Zeile bedenke man, daß bei konjugiert komplexen ϱ_1, ϱ natürlich $h = g$, $\Omega_g(x) = \overline{\Psi_g(x)}$ ist. Also

$$u(x) = u_0(x^{\varrho_2} + \psi_1 x^{\varrho_2+1} + \cdots + \psi_{g-1} x^{\varrho_2+g-1}) + u_1(x^{\varrho_1} + \overline{\psi}_1 x^{\varrho_1+1} + \\ + \cdots + \overline{\psi}_{g-1} x^{\varrho_1+g-1}) + O(x^{r_2+g} |\log x|)$$

$$x u'(x) = u_0(\varrho_2 x^{\varrho_2} + (\varrho_2+1) \psi_1 x^{\varrho_2+1} + \cdots + (\varrho_2+g-1) \psi_{g-1} x^{\varrho_2+g-1}) + \\ + u_1(\varrho_1 x^{\varrho_1} + (\varrho_1+1) \overline{\psi}_1 x_{\varrho_1+1} + \cdots + (\varrho_1+g-1) \overline{\psi}_{g-1} x^{\varrho_1+g-1}) + \\ + O(x^{r_2+g} |\log x|)$$

woraus die dritte Zeile (28) folgt.

Aus dieser Darstellung folgt, daß u_0 und u_1 durch $u(x)$ eindeutig bestimm sind. Wenn $u(x)$ reell, dann sind u_0, u_1 reell, falls ϱ_1, ϱ_2 reell sind, sonst sin sie konjugiertkomplex. Wenn die Differentialgleichung (5) bei $x = 0$ regulä ist, $\sigma = 0$, $g = 2$, $q_0 = q_1 = 0$, dann wird $\varrho_1 = 1$, $\varrho_2 = 0$. Nach (22) is $c = 0$. Also $\Psi_g(x) = 1$ und $u_0 = \lim_{x \to 0} u(x) = u(0)$, $u_1 = \lim_{x \to 0} \frac{u(x) - u_0}{x} = u'(0)$

Hilfssatz. *Für jedes $u(x)$ aus $\mathfrak{D}$ ist* $\int_0^L k |u|^2 dx < \infty$ *und* $\int_0^L \frac{1}{k} |(pu')' - qu|^2 dx < \infty$.

Beweis. Gewiß ist $u(x) = O(x^{r_2} |\log x|)$, also $k|u|^2 = O(x^{\sigma-2+g+2r_2} \log^2 x)$ $= O(x^{-1+g+r_2-r_1} \log^2 x)$. Wegen (15) daher $\int_0^L k |u|^2 dx < \infty$. Setzt ma $U(x) = u_0 \psi(x) + u_1 \omega(x)$, so ist $U(x)$ eine Lösung von (5), also auc $\int_0^L \frac{1}{k} |(pU')' - qU|^2 dx < \infty$. Es ist $w = U - u = O_2(x^{r_2+g} |\log x|)$, als

$$(pw')' - qw = O(x^{\sigma+r_2+g-2} |\log x|), \quad \frac{1}{k} |(pw')' - qw|^2 \\ = O(x^{-\sigma+2-g+2\sigma+2r_2+2g-4} \log^2 x) = O(x^{-1-r_1+r_2+g} \log^2 x)$$

also wieder $\int_0^L \frac{1}{k} |(pw')' - qw|^2 dx < \infty$, also auch $\int_0^L \frac{1}{k} |(pu')' - qu|^2 dx < \infty$

Es ist also $\mathfrak{D}$ ein Teilraum des HILBERTschen Raumes $\mathfrak{H}$ [aller Funktionen (x) mit $\int_0^L k\,|u|^2\,dx < \infty$] und für jedes u aus $\mathfrak{D}$ sind die WEYLschen Bedingungen II von (4) erfüllt.

§ 2.

Die Randbedingungen.

Für jedes $u(x)$ aus $\mathfrak{D}$ ist der Operator $A\,u = \frac{1}{k}\{-(p\,u')' + q\,u\}$ erklärt und liefert ein Element aus $\mathfrak{H}$). Der Bereich $\mathfrak{D}$ muß aber weiter so eingeschränkt werden, daß für zwei Funktionen $u\,(x)$ und $v\,(x)$ des eingeschränkten Bereiches

29) $$(Au, v) - (u, Av) = \int_0^L [-(p\,u')' + q\,u]\,\bar{v}\,dx - \int_0^L u\cdot[-(p\,\bar{v}')' + q\,\bar{v}]\,dx = 0$$

wird. Es ist $(Au, v) - (u, Av) = B_L(u, v) - B_0(u, v)$, wenn

30) $$\begin{aligned} B_x(u, v) &= -\,p(x)\,u'(x)\,\bar{v}(x) + p(x)\,u(x)\,\bar{v}'(x), \\ B_L(u, v) &= \lim_{x\to L} B_x(u, v), \quad B_0 = \lim_{x\to 0} B_x(u, v) \end{aligned} \qquad 0 < x \leqq L,$$

ersetzt wird. Daß diese Grenzwerte für Funktionen u, v aus $\mathfrak{D}$ existieren, ist klar. Offenbar

31) $$B_L(u, v) = -\,p(L)\,u'(L)\,\bar{v}(L) + p(L)\,u(L)\,\bar{v}'(L).$$

Zur Berechnung von $B_0(u, v)$ setzen wir $u = u_0\Psi_\varrho + u_1\Omega_\varrho + \tilde{u}$, $v = v_0\Psi_\varrho + v_1\Omega_\varrho + \tilde{v}$. Es wird $B_x(u, v) = B_x(u_0\Psi_\varrho + u_1\Omega_\varrho, v_0\Psi_\varrho + v_1\Omega_\varrho) + B_x(u_0\Psi_\varrho + u_1\Omega_\varrho, \tilde{v}) + B_x(\tilde{u}, v_0\Psi_\varrho + v_1\Omega_\varrho) + B_x(\tilde{u}, \tilde{v})$. Die Funktionen $\Psi_\varrho, \Omega_\varrho$ sind $O(x^{r_2}|\log x|)$ und die Ableitungen $\Psi'_\varrho, \Omega'_\varrho$ sind $O(x^{r_2-1}|\log x|)$. Daher $B_x(u_0\Psi_\varrho + u_1\Omega_\varrho, \tilde{v}) = O(x^{\sigma+2r_2-1+\varrho}\log^2 x) = O(x^{r_2-r_1+\varrho}\log^2 x)$, also $B_0(u_0\Psi_\varrho + u_1\Omega_\varrho, \tilde{v}) = 0$ wegen (15). Ebenso zeigt man $B_0(\tilde{u}, v_0\Psi_\varrho + v_1\Omega_\varrho) = 0$. $B_x(\tilde{u}, \tilde{v}) = O(x^{\sigma+2r_2+2\varrho-1}\log^2 x) = O(x^{r_2-r_1+2+\varrho}\log^2 x)$, also $B_0(\tilde{u}, \tilde{v}) = 0$. Es ist also

32) $$\begin{aligned} B_0(u, v) = u_0\bar{v}_0 B_0(\Psi_\varrho, \Psi_\varrho) + u_1\bar{v}_0 B_0(\Omega_\varrho, \Psi_\varrho) + u_0\bar{v}_1 B_0(\Psi_\varrho, \Omega_\varrho) + \\ + u_1\bar{v}_1 B_0(\Omega_\varrho, \Omega_\varrho). \end{aligned}$$

Es sei weiter ϱ_1, ϱ_2 nicht reell. Wegen $\Omega_\varrho = \overline{\Psi}_\varrho$ ist $B_x(\Omega_\varrho, \Psi_\varrho) \equiv 0$, $B_x(\Psi_\varrho, \Omega_\varrho) \equiv 0$, $B_x(\Psi_\varrho, \Psi_\varrho) = x^\sigma(p_0 + \cdots)\{-(\varrho_2 x^{\varrho_2-1} + \cdots)(x^{\varrho_1} + \cdots) + (x^{\varrho_2} + \cdots)(\varrho_1 x^{\varrho_1-1} + \cdots)\} = x^{\sigma+\varrho_2+\varrho_1-1}\,p_0(\varrho_1 - \varrho_2)$ + höhere Potenzen von x. Wegen $\sigma + \varrho_2 + \varrho_1 - 1 = 0$ ist $B_0(\Psi_\varrho, \Psi_\varrho) = p_0(\varrho_1 - \varrho_2)$ und $B_0(\Omega_\varrho, \Omega_\varrho) = \overline{B_0(\Psi_\varrho, \Psi_\varrho)} = p_0(\varrho_2 - \varrho_1)$. Also

33) $$B_0(u, v) = p_0(\varrho_1 - \varrho_2)\,(u_0\bar{v}_0 - u_1\bar{v}_1).$$

Es seien nun ϱ_1, ϱ_2 reell. Dann sind auch Ψ_g, Ω_g reell, also $B_0(\Psi_g, \Psi$
$= B_0(\Omega_g, \Omega_g) = 0$. Erstens $\varrho_1 - \varrho_2$ nicht ganz. In diesem Fall wird

$$B_x(\Psi_g, \Omega_g) = x^\sigma(p_0 + \cdots)\{-(\varrho_2 x^{\varrho_2 - 1} + \cdots)(x^{\varrho_1} + \cdots) + (x^{\varrho_2} + \cdots)(\varrho_1 x^{\varrho_1 - 1} + \cdots)\} = x^{\sigma + \varrho_2 + \varrho_1 - 1} p_0(\varrho_1 - \varrho_2) + \text{höhere Potenzen von } x$$

Daraus $B_0(\Psi_g, \Omega_g) = p_0(\varrho_1 - \varrho_2)$ und $B_0(\Omega_g, \Psi_g) = -p_0(\varrho_1 - \varrho_2)$, als

(34) $B_0(u, v) = (u_0 \bar{v}_1 - u_1 \bar{v}_0) p_0(\varrho_1 - \varrho_2)$, ϱ_1, ϱ_2 reell, $\varrho_1 - \varrho_2$ nicht gan

Zweitens $\varrho_1 - \varrho_2 = n$ ganz.

$$B_x(\Psi_g, \Omega_g) = x^\sigma(p_0 + \cdots)\{-[\varrho_2 \psi_0 x^{\varrho_2 - 1} + \cdots + (\varrho_2 + g - 1)\psi_{g-1} x^{\varrho_2 + g - 2} + c\,\omega_0 x^{\varrho_1 - 1}(\varrho_1 \log x + 1) + \cdots] \cdot [\omega_0 x^{\varrho_1} + \cdots] + [\psi_0 x^{\varrho_2} + \cdots + c\,\omega_0 x^{\varrho_1} \log x + \cdots][\omega_0 \varrho_1 x^{\varrho_1 - 1} + \cdots]$$

Es sei zunächst $\varrho_1 - \varrho_2 = 0$. Dann ist $\psi_0 = 0$, $c = 1$ und es wird

$$B_x(\Psi_g, \Omega_g) = -x^{\sigma + \varrho_1 - 1 + \varrho_1} p_0 \omega_0^2 + \cdots,$$

wobei die Punkte Glieder bedeuten, die mit x gegen Null gehen; $B_0(\Psi_g, \Omega_g$
$= -p_0$, $B_0(\Omega_g, \Psi_g) = p_0$ also

$$B_0(u, v) = -p_0(u_0 \bar{v}_1 - u_1 \bar{v}_0). \tag{35}$$

Schließlich $\varrho_1 - \varrho_2 = n > 0$. Dann $\Psi_0 = 1$ und

$$B_x(\Psi_g, \Omega_g) = x^{\sigma + \varrho_2 + \varrho_1 - 1} \cdot p_0(\varrho_1 - \varrho_2) + \cdots,$$

also $B_0(\Psi_g, \Omega_g) = p_0(\varrho_1 - \varrho_2)$ und daher

(36) $B_0(u, v) = (u_0 \bar{v}_1 - u_1 \bar{v}_0) p_0(\varrho_1 - \varrho_2)$, $\varrho_1 - \varrho_2 = n$ ganz positiv

Zusammenfassung: Für u, v aus $\mathfrak{D}$ gilt

$$B_0(u, v) = \begin{cases} (u_0 \bar{v}_1 - u_1 \bar{v}_0) \cdot P_0, & \text{wenn } \varrho_1, \varrho_2 \text{ reell} \\ (u_0 \bar{v}_0 - u_1 \bar{v}_1) p_0(\varrho_1 - \varrho_2), & \text{wenn } \varrho_1, \varrho_2 \text{ nicht reell;} \end{cases} \tag{37}$$

dabei ist $P_0 = p_0(\varrho_1 - \varrho_2)$, wenn $\varrho_1 - \varrho_2 \neq 0$ und $P_0 = -p_0$, wenn $\varrho_1 - \varrho_2 = 0$.

Wir legen nun den Funktionen aus $\mathfrak{D}$ am regulären Intervallende $x = L$ die Randbedingung

$$u(L) \cos \beta + u'(L) \sin \beta = 0, \qquad 0 \leqq \beta < \pi \tag{38}$$

auf und nennen den so entstehenden Teilraum $\mathfrak{D}_\beta$. Es ist für u, v aus $\mathfrak{D}_\beta$ offenbar $(Au, v) - (u, Av) = -B_0(u, v)$. Um $(Au, v) - (u, Av) = 0$ zu erhalten, schränken wir $\mathfrak{D}_\beta$ weiter ein, indem wir mit einem festen α aus $0 \leqq \alpha < \pi$ verlangen

$$\begin{aligned} &u_0 \cos \alpha + u_1 \sin \alpha = 0, && \text{wenn } \varrho_1, \varrho_2 \text{ reell} \\ &u_0 e^{i\alpha} + u_1 e^{-i\alpha} = 0, && \text{wenn } \varrho_1, \varrho_2 \text{ nicht reell.} \end{aligned} \tag{39}$$

Definition. $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}$ *ist die Gesamtheit der Funktionen* $u(x)$ *aus* $\mathfrak{D}$, *welche mit einem festen Paar* α, β *aus* $0 \leqq \alpha, \beta < \pi$ *die Randbedingungen* (38) *bei* $x = L$ *und die Randbedingungen* (39) *bei* $x = 0$ *erfüllen.*

Offenbar $B_0(u, v) = 0$ für u, v aus $\mathfrak{A}_{\alpha,\beta}$ und daher auch $(Au, v) = (u, Av)$. Gezeigt soll werden, daß der Operator A in $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}$ *ein diskretes Spektrum besitzt*, d. h. daß es Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ mit $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$ und Eigenfunktionen $z_1(x), z_2(x), \ldots$ aus $\mathfrak{A}_{\alpha,\beta}$ gibt, die ein vollständiges, orthogonales und normiertes System bilden.

Um das nachzuweisen, genügt es zu zeigen, daß der Operator $A - i$ in $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}$ eine vollstetige Reziproke besitzt. Zu dieser Reziproken gelangt man in der üblichen Weise mit Hilfe der Greenschen Funktion. Es sei $\psi(x)$, $\omega(x)$ das im Sinne von (12) bis (14) genormte Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$-(p u')' + q u - i k u = 0 \tag{40}$$

und

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sin\alpha\, \psi(x) - \cos\alpha\, \omega(x), && \text{wenn } \varrho_1, \varrho_2 \text{ reell.} \\ \varphi(x) &= e^{-i\alpha} \psi(x) - e^{i\alpha} \omega(x), && \text{wenn } \varrho_1, \varrho_2 \text{ nicht reell.} \end{aligned} \tag{39a}$$

Dann genügt $\varphi(x)$ bei $x = 0$ der Randbedingung (39). Unter $\chi_1(x)$ werde eine nicht identisch verschwindende Lösung von (40) verstanden, für die bei $x = L$ die Randbedingung (38) erfüllt ist. Wären $\varphi(x)$ und $\chi_1(x)$ linear abhängig, dann würde $\varphi(x)$ auch die Randbedingung (38) erfüllen, es läge also $\varphi(x)$ in $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}$, was nicht möglich ist, weil $(A\varphi, \varphi) = (\varphi, A\varphi)$ reell wäre, während $(A\varphi, \varphi) = (i\varphi, \varphi) = i(\varphi, \varphi)$ sein müßte. Also $\varphi(x)$ und $\chi_1(x)$ linear unabhängig, die Konstante $\Delta = -p\varphi\chi_1' + p\varphi'\chi_1 \neq 0$. Wir setzen $\chi(x) = \chi_1/\Delta$, erhalten die Greensche Funktion $G(x, \xi) = \varphi(x)\chi(\xi)$ für $0 < x < \xi$ und $G(x, \xi) = \varphi(\xi)\chi(x)$ für $\xi < x < L$ und betrachten den Integraloperator

$$Rf = \int_0^L G(x, \xi)\, k(\xi)\, f(\xi)\, d\xi = \chi(x) \int_0^x \varphi\, k f\, d\xi + \varphi(x) \int_x^L \chi\, k f\, d\xi \tag{41}$$

zunächst im Bereich $\mathfrak{F}$ aller in $0 < x \leqq L$ stückweise stetigen Funktionen, die in einer Umgebung von $x = 0$ identisch verschwinden. Es ist $u = Rf$ in $0 < x \leqq L$ stetig differenzierbar, $u' = \chi'(x) \int_0^x \varphi\, k f\, d\xi + \varphi'(x) \int_x^L \chi\, k f\, d\xi$, weiter $-(pu')' + qu = (-p\chi'\varphi + p\varphi'\chi) kf + iku$, also $-(pu')' + qu - iku = kf$, insbesondere u'' stückweise stetig in $0 < x \leqq L$. Da für x genügend nahe an $x = 0$ jedenfalls $u(x) = \varphi(x) \int_0^L \chi\, k f\, d\xi$ ist, hat $u(x)$ die

Form (26), ist also ein Element aus $\mathfrak{D}$, für das überdies die beiden Randbedingungen (38) und (39) erfüllt sind, d. h. $u(x)$ ist ein Element aus $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}$ und $(A - i)\, u = f$. Bezeichnet man mit $\dot{\mathfrak{A}}_{\alpha\beta}$ die Gesamtheit der u von der Form $u = Rf$ mit f aus $\dot{\mathfrak{F}}$, so ist für A in $\dot{\mathfrak{A}}_{\alpha\beta}$ die Symmetriebedingung $(Au, v) - (u, Av)$ gültig und R in $\dot{\mathfrak{F}}$ ist die Reziproke von A in $\dot{\mathfrak{A}}_{\alpha\beta}$. Es ist $(Rf, Rf) \leqq M\,(f, f)$ mit $M = \int_0^L \int_0^L |G(x,\xi)|^2\, k(x)\, k(\xi)\, dx\, d\xi \leqq 2 \int_0^L k |\chi|^2\, d\xi \int_0^L k |\varphi|^2\, d\xi < \infty$. Also ist R in $\dot{\mathfrak{F}}$ ein beschränkter, sogar vollstetiger Operator. Er kann auf ganz $\mathfrak{H}$ fortgesetzt werden; $\dot{\mathfrak{F}}$ liegt dicht in $\mathfrak{H}$. Die Gesamtheit $\overline{\mathfrak{A}_{\alpha\beta}}$ der $u = Rf$ mit f aus $\mathfrak{H}$ ist der größte Bereich, auf den man den Operator A in $\dot{\mathfrak{A}}_{\alpha\beta}$ als symmetrischen Operator fortsetzen kann: Man sagt A in $\overline{\mathfrak{A}_{\alpha\beta}}$ ist selbst adjungiert (= hypermaximal). Da R vollstetig ist, besitzt A in $\overline{\mathfrak{A}_{\alpha\beta}}$ ein diskretes Spektrum. Man sieht aber leicht, daß alle Eigenfunktionen bereits in $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}$ liegen. Sei nämlich $z(x)$ eine Eigenfunktion von A in $\overline{\mathfrak{A}_{\alpha\beta}}$, λ sein Eigenwert. Dann ist $(A - i)\, z = (\lambda - i)\, z$,

$$(42) \qquad z(x) = (\lambda - i)\, Rz = (\lambda - i)\, \chi(x) \int_0^x q\, k\, z\, d\xi + (\lambda - i)\, \varphi(x) \int_x^L \chi k\, z\, d\xi.$$

Jedenfalls liegt z in $\mathfrak{H}$. Es folgt aber aus dieser Integraldarstellung sogar, daß $z(x), z'(x)$ in $0 < x \leqq L$ stetig und z'' stückweise stetig ist und $-(pz')' + qz = \lambda k z$. Da $z(x)$ Lösung der Differentialgleichung ist, hat es in der Umgebung von $x = 0$ die Form $z(x) = z_0 \Psi_\varrho(x) + z_1 \Omega_\varrho(x) + O_2(x^{r_2 + \varrho} |\log x|)$ gehört also zu $\mathfrak{D}$. Für $x = L$ genügt es der Randbedingung (38), wie direkt aus (42) folgt. Daß auch (39) erfüllt ist, läßt sich so einsehen: Sei $\tilde{\varphi}(x)$ eine Funktion, die in $0 < x \leqq L$ stetig ist, für die $\tilde{\varphi}'(x)$ stetig und $\tilde{\varphi}''(x)$ stückweise stetig ist; $\tilde{\varphi}(x) \equiv \varphi(x)$ in einer Umgebung von $x = 0$ und $\tilde{\varphi} \equiv 0$ in einer Umgebung von $x = L$. Dann liegt $\tilde{\varphi}$ in $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}$, also $(Az, \tilde{\varphi}) - (z, A\tilde{\varphi}) = 0$, also $B_L(z, \tilde{\varphi}) - B_0(z, \tilde{\varphi}) = 0$. Wegen $B_L(z, \tilde{\varphi}) = 0$ auch $B_0(z, \tilde{\varphi}) = 0$, d. h. $B_0(z, \varphi) = 0$. Aus (37) wird wegen (39) sofort $0 = z_0 \cdot -\cos\alpha - z_1 \sin\alpha$, wenn ϱ_1, ϱ_2 reell und sonst $0 = z_0 e^{i\alpha} + z_1 e^{-i\alpha}$. Das sind aber genau die Randbedingungen (39). Damit ist nachgewiesen, daß jede Eigenfunktion $z(x)$ tatsächlich schon im Bereich $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}$ liegt.

Man kann folgenden Satz aussprechen: *Die Differentialgleichung* $-(pu')' + qu = \lambda ku$, *deren Koeffizienten in* $0 < x \leqq L$ *die am Ende der Einleitung genannten Voraussetzungen* 1. *bis* 4. *erfüllen, besitzt ein vollständiges orthogonales und normiertes System von Eigenfunktionen, welche folgenden Randbedingungen genügen: Sind* α, β *zwei feste Zahlen aus den Intervallen* $0 \leqq \alpha < \pi$, $0 \leqq \beta < \pi$, *so ist* $u(L)\cos\beta + u'(L)\sin\beta = 0$ *die Randbedingung bei* $x = L$. *Bedeuten* $\psi(x)$ *und* $\omega(x)$ *das genormte Fundamental-*

ystem [vgl. (12) bis (14)] der Differentialgleichung[10]) *und wird* $u(x) = u_0\,\psi(x) + u_1\omega(x)$ *gesetzt, so ist* $u_0 \cos\alpha + u_1 \sin\alpha = 0$ *(wenn die charakteristischen Exponenten* ϱ_1, ϱ_2 *reell sind) bzw.* $u_0 e^{i\alpha} + u_1 e^{-i\alpha} = 0$ *(wenn* ϱ_1, ϱ_2 *nicht reell sind) die Randbedingung bei* $x = 0$.

Die zugehörigen Eigenwerte haben keinen endlichen Häufungspunkt.

§ 3.

Kreisförmige Membran mit festgehaltenem Rand.

Dieses Problem führt auf die Eigenwertaufgabe $u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = 0$ n $x^2 + y^2 < 1$ und $u = 0$ auf $x^2 + y^2 = 1$. Bei Einführung von Polarkoordinaten genügen die radialen Bestandteile $u = u(r)$ der Gleichung

43) $$-(r u')' + \frac{n^2}{r} u = \lambda r u, \qquad 0 < r \leqq 1,$$

vobei $n = 0, 1, \ldots$ sein kann. In $r = 1$ ist die Randbedingung $u(1) = 0$ zu tellen. Die Zahlen x, y, r sollen nicht die üblichen Längen, sondern diese Längen geteilt durch den Radius R der Membran bedeuten. Insbesondere ind r und λ reine Zahlen. Welches sind die (mathematisch) zulässigen Randedingungen in $r = 0$, die über die Bedingungen $\int_0^1 r\,|u|^2\,dr < \infty$ und $\int_0^1 \frac{1}{r}\,\left|-(r u')' + \frac{n^2}{r} u\right|^2 dr < \infty$ hinaus gestellt werden müssen? Die harakteristischen Exponenten von (43) für $r = 0$ sind $\varrho_1 = +n$, $\varrho_2 = -n$. Also liegt für $n > 0$ an der Stelle $r = 0$ der Grenzpunktfall vor und eine Randbedingung bei $r = 0$ kommt allein für $n = 0$ in Frage (Grenzkreisfall). Die Differentialgleichung (43) für $n = 0$, also

44) $$-(r u')' = \lambda r u$$

esitzt als Fundamentalsystem die beiden Lösungen $J_0(\sqrt{\lambda}\,r) = 1 - \frac{\lambda}{4} r^2 + \cdots$ nd $Y_0(\sqrt{\lambda}\,r) = \frac{2}{\pi}\left(C + \log\frac{\sqrt{\lambda}\,r}{2}\right) J_0(\sqrt{\lambda}\,r) + \frac{\lambda}{2\pi} r^2 + \cdots$[11]). Das genormte Fundamentalsystem [vgl. (12) bis (14)] ist also

$$\omega(r) = J_0(\sqrt{\lambda}\,r), \quad \psi(r) = \frac{\pi}{2} Y_0(\sqrt{\lambda}\,r) - \left(\log\frac{\sqrt{\lambda}}{2} + C\right) J_0(\sqrt{\lambda}\,r).$$

[10]) Dabei ist λ als Veränderliche aufzufassen, so daß $\psi(x)$, $\omega(x)$ und daher auch u_0 und u_1 Funktionen von λ sind.

[11]) $C = 0{,}577\ldots$ ist die EULERsche Konstante.

Jede Lösung von (44) hat die Form $u = u_0 \psi(r) + u_1 \omega(r)$. In $r = 1$ lautet die Randbedingung

$$u_0 \psi(1) + u_1 \omega(1) = 0. \tag{45}$$

In $r = 0$ ist eine jede Bedingung der Form

$$u_0 \cos\alpha + u_1 \sin\alpha = 0 \tag{46}$$

zulässig, unter α irgendeinen Wert aus $0 \leqq \alpha < \pi$ verstanden. Nach (45) und (46) ergibt sich als transzendente Gleichung für die Eigenwerte $\omega(1)\cos\alpha - \psi(1)\sin\alpha = 0$ oder

$$J_0(\sqrt{\lambda}) \cdot \left(\cos\alpha + \left(\log\frac{\sqrt{\lambda}}{2} + C\right)\sin\alpha\right) - \frac{\pi}{2} Y_0(\sqrt{\lambda})\sin\alpha = 0. \tag{47}$$

Wählt man speziell $\alpha = 0$, so entsteht aus (46) die Randbedingung $u_0 = 0$, also $u = u_1\omega(r)$; aus (47) wird $J_0(\sqrt{\lambda}) = 0$. Es ist das die einzige Randbedingung, bei der alle Eigenfunktionen in $r = 0$ stetig sind. Man kann daher die Bedingung $u_0 = 0$ auch durch die Forderung der Stetigkeit bei $r = 0$ ersetzen. Für $\alpha = 0$ ergibt sich also die übliche Behandlung der schwingenden eingespannten Membran.

Was ist aber die physikalische Bedeutung der Bedingung (46) für $\alpha \neq 0$? Ich behaupte, man kann diese Bedingung folgendermaßen deuten. Man denke sich auf die Punkte der Membran pro Flächeneinheit in der u-Richtung eine elastische Kraft wirken der Größe $-Qu$. Dabei soll Q verschwinden außerhalb des kleinen Kreises $x^2 + y^2 \leqq s^2 < 1$ und in diesem Kreis den konstanten (aber von s abhängenden) Wert $Q_0 = Q_0(s)$ haben. Das Potential dieser Kraft ist $\frac{1}{2} Q u^2$. Die Schwingungszustände, die dem Grundproblem $n = 0$ entsprechen, genügen der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -(rU')' + qrU &= \lambda rU \quad \text{für } 0 < r \leqq s, \\ -(rU')' &= \lambda rU \quad \text{für } s \leqq r \leqq 1. \end{aligned} \tag{48}$$

Es ist $q = q(s) = \frac{Q_0}{S} R^2$ (S Vorspannung, R Radius der Membran). Für $r = 0$ soll die Forderung „$U(r)$ stetig in $r = 0$“ gestellt werden [die, wie wir eben sahen, auf die Wahl $\alpha = 0$ in der Randbedingung (46) hinausläuft]. Bei festem λ hängt jede dieser Forderung genügende, nicht identisch verschwindende Lösung $U(r)$ von (48) auch noch von s ab: $U = U(r; s)$. Es soll gezeigt werden, daß — unter $c(s)$ einen geeigneten Faktor verstanden — die Funktion $c(s)\,U(r; s)$ für $s \to 0$ in $0 < r < 1$ gegen eine nicht identisch verschwindende Lösung $u(r)$ der Differentialgleichung (44) strebt, die

$r = 0$ der Randbedingung (46) genügt; natürlich muß zu diesem Zweck $q(s)$ geeignet gewählt werden. Offenbar ist

$$U = A J_0(\sqrt{\lambda}\, r) + B Y_0(\sqrt{\lambda}\, r), \qquad s \leqq r \leqq 1$$
$$U = a J_0(\sqrt{\lambda - q}\, r), \qquad 0 < r \leqq s,$$

wobei die Zahlen A, B, a von r unabhängig sind. An der Stelle $r = s$ muß U einmal stetig nach r differenzierbar sein, also

$$\begin{aligned} a J_0(\sqrt{\lambda - q}\, s) &= A J_0(\sqrt{\lambda}\, s) + B Y_0(\sqrt{\lambda}\, s), \\ a \dot{J}_0(\sqrt{\lambda - q}\, s) &= A \dot{J}_0(\sqrt{\lambda}\, s) + B \dot{Y}_0(\sqrt{\lambda}\, s), \end{aligned} \tag{49}$$

wenn die Differentiation nach s durch einen Punkt bezeichnet wird. Daraus

$$\frac{B}{A} = \frac{J_0(\sqrt{\lambda}\, s)\, \dot{J}_0(\sqrt{\lambda - q}\, s) - \dot{J}_0(\sqrt{\lambda}\, s)\, J_0(\sqrt{\lambda - q}\, s)}{J_0(\sqrt{\lambda - q}\, s)\, \dot{Y}_0(\sqrt{\lambda}\, s) - \dot{J}_0(\sqrt{\lambda - q}\, s)\, Y_0(\sqrt{\lambda}\, s)} = - \frac{J_0(\sqrt{\lambda}\, s) - \chi(s)\, \dot{J}_0(\sqrt{\lambda}\, s)}{Y_0(\sqrt{\lambda}\, s) - \chi(s)\, \dot{Y}_0(\sqrt{\lambda}\, s)}$$

mit

$$\chi(s) = \frac{J_0(\sqrt{\lambda - q}\, s)}{\dot{J}_0(\sqrt{\lambda - q}\, s)} = \frac{1 - \frac{(\lambda - q) s^2}{4} + \frac{(\lambda - q)^2 s^4}{64} - \cdots}{-\frac{(\lambda - q) s}{2}\left(1 - \frac{(\lambda - q) s^2}{8} + \cdots\right)}$$
$$= \frac{-2}{(\lambda - q) s}\left(1 - \frac{1}{8}(\lambda - q) s^2 + \cdots\right),$$

wobei die Punkte für zweite und höhere Potenzen von $(\lambda - q) s^2$ stehen. Für das folgende denken wir uns das bisher unbestimmt gehaltene $q = q(s)$ so gewählt, daß

$$\lim_{s \to 0} |q(s)| = + \infty \quad \text{und} \quad \lim_{s \to 0} (\lambda - q) s^2 = 0 \tag{50}$$

gilt. Dann wird $\lim_{s \to 0} \chi(s)\, \dot{J}_0(\sqrt{\lambda}\, s) = 0$ und $J_0(\sqrt{\lambda}\, s) - \chi(s)\, \dot{J}_0(\sqrt{\lambda}\, s) = 1 + z_0(s)$ mit $\lim_{s \to 0} z_0(s) = 0$. Ferner $\chi(s) = -\frac{2}{(\lambda - q) s} + \frac{1}{4} s + s\, \chi_0(s)$ mit $\lim_{s \to 0} \chi_0(s) = 0$. Es ist mit nicht interessierenden Konstanten $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$

$$Y_0(\sqrt{\lambda}\, s) = \frac{2}{\pi} \log s \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{4} s^2 + \cdots\right) + \frac{2}{\pi}\left(C + \log \frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right) + a_1 s^2 + a_2 s^3 + \cdots,$$
$$\dot{Y}_0(\sqrt{\lambda}\, s) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{s} + \frac{2}{\pi} \log s \left(-\frac{\lambda}{2} s + \cdots\right) + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots,$$
$$Y_0(\sqrt{\lambda}\, s) - \chi(s)\, \dot{Y}_0(\sqrt{\lambda}\, s) = \frac{2}{\pi} \log s + \frac{2}{\pi}\left(C + \log \frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right) +$$
$$+ \frac{2}{(\lambda - q) s}\left(\frac{2}{\pi} \frac{1}{s} - \frac{2}{\pi} \frac{\lambda}{2} s \log s\right) - \frac{1}{4} s \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{s} + f_0(s),$$

wobei $\lim_{s\to 0} f_0(s) = 0$ ist. Es wird

$$\frac{B}{A} = -\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1+z_0(s)}{\log s + \frac{2}{\lambda-q}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{\lambda}{2}\log s\right) + C + \log\frac{\sqrt{\lambda}}{2} - \frac{1}{4} + \frac{\pi}{2} f_0(s)}.$$

Nun ist der Versuch naheliegend, q so zu bestimmen, daß $\log s + \frac{2}{\lambda-q}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{\lambda}{2}\log s\right) = k$ mit einem von s unabhängigen k wird. Daraus würde sich ergeben $q = \frac{2 - s^2\lambda k}{s^2(-k+\log s)}$. Für den Grenzübergang $s\to 0$ wird das Glied $-s^2\lambda k$ im Zähler unwichtig sein. Daher ist unser endgültiger Ansatz

$$q = \frac{2}{s^2(-k+\log s)}, \qquad k \text{ beliebige Konstante;} \tag{51}$$

da (50) erfüllt ist, so ist dieser Ansatz jedenfalls erlaubt. Es wird nun

$$\log s + \frac{2}{\lambda-q}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{\lambda}{2}\log s\right) = \frac{-2k}{-2+\lambda s^2(-k+\log s)}$$

und daher

$$\lim_{s\to 0}\frac{B}{A} = -\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{C+\log\frac{\sqrt{\lambda}}{2}-\frac{1}{4}+k}.$$

Setzt man also $c(s) = \frac{C+\log\frac{\sqrt{\lambda}}{2}-\frac{1}{4}+k}{A}$, so gilt für $0 < r \leqq 1$ die Beziehung

$$\lim_{s\to 0} c(s)\, U = \left(k + C + \log\frac{\sqrt{\lambda}}{2} - \frac{1}{4}\right) J_0(\sqrt{\lambda}\, r) - \frac{\pi}{2} Y_0(\sqrt{\lambda}\, r) = u(r),$$

wobei $u(r)$ eine Lösung von (44) ist, und zwar $u(r) = u_0\psi(r) + u_1\omega(r)$ mit $u_0 = -1$ und $u_1 = k - \frac{1}{4}$. Damit u_0, u_1 der Gleichung (46) genügen, hat man $(k-\frac{1}{4})\sin\alpha - \cos\alpha = 0$ zu befriedigen, d. h.

$$k = \tfrac{1}{4} + \operatorname{ctg}\alpha$$

zu setzen. Dem α-Bereich entspricht eineindeutig der k-Bereich $-\infty < k < \infty$. Der Wert $\alpha = 0$ entspricht $k = \infty$. Es ist bemerkenswert, daß die Kraft $-Qu$ für jeden Wert von k immer eine abstoßende ist, denn nach (51) ist q negativ, sobald s genügend klein ist — ganz gleichgültig, welches Vorzeichen k besitzt. Da die Randbedingung (46) erst in der Grenze für $s\to 0$ zustande kommt, wird man die Kraft $-Q\cdot u$ in der Grenze für $s\to 0$ als eine (abstoßende) „Einzelkraft" bezeichnen, und zwar als eine elastische Einzelkraft wegen der Proportionalität zu u. Zwei verschiedenen Werten von k in (51) entsprechen auch zwei verschiedene Einzelkräfte. Der übliche Fall ist der Fall der verschwindenden Einzelkraft; er tritt ein für $k = \infty$.

Das unterschiedliche Verhalten von Grundproblem ($n = 0$) und Oberproblemen ($n = 1, 2, \ldots$) hinsichtlich der Randbedingung in $r = 0$ ist jetzt

physikalisch ohne weiteres verständlich. Die Eigenfunktionen der Oberprobleme bei der schwingenden Membran verschwinden nämlich alle in $r = 0$, während die Eigenfunktionen des Grundproblems in $r = 0$ von Null verschieden sind. Bringt man also eine Kraft der Form $-Q \cdot u$ an, wo Q a nur in einer kleinen Umgebung von $r = 0$ von Null verschieden ist, so ist verständlich, daß diese Kraft bei den Oberproblemen, im Gegensatz zum Grundproblem, wirkungslos ist und auf keine neue Randbedingung bei $= 0$ führt.

§ 4.

Die Wellengleichung des Keplerproblems.

(Zusatz bei der Korrektur vom 28. 11. 1943.)

Der radiale Anteil $u = u(r)$ der Wellenfunktion — nur dieser soll im olgenden betrachtet werden — genügt der Schrödingerschen Gleichung

52) $$u'' + \frac{2}{r} u' - \frac{l(l+1)}{r^2} u + \frac{2Z}{r} u + \lambda u = 0, \qquad 0 < r < \infty.$$

Hierin ist Z die Kernladungszahl, $l = 0, 1, 2, \ldots$. Unter r ist nicht die Entfernung Elektron—Kern, sondern diese Entfernung geteilt durch $= \frac{\hbar^2}{4\pi^2 m e^2}$ verstanden. Der Energieparameter E ergibt sich aus λ durch $E = \frac{\hbar^2 \lambda}{8\pi^2 m a^2}$. Es sind also r, Z, λ reine Zahlen. Das Normierungsintegral eißt $\int_0^\infty |u|^2 r^2 dr$. Welches sind die Randbedingungen, die bei $r = 0$ und bei $r = \infty$ über die Weylschen Bedingungen $\int_0^\infty |u|^2 r^2 dr < \infty$ und $\int_0^\infty \frac{1}{r^2} |(r^2 u')' - l(l+1) u + 2Z r u|^2 dr < \infty$ hinaus gestellt werden müssen? Für jedes $l = 0, 1, 2, \ldots$ und jedes λ gibt es bekanntlich immer eine Lösung von (52), für die $\int_1^\infty |u|^2 r^2 dr = \infty$ ausfällt. Also liegt bei $r = \infty$ der Grenzpunktfall vor und es ist an diesem Intervallende *keine* zusätzliche Randbedingung zu stellen. Das Ende $r = 0$ ist eine Stelle der Bestimmtheit, die charakteristischen Exponenten sind l und $-l-1$. Wenn $l = 1, 2, \ldots$, so gibt es immer eine Lösung, für die $\int_0^1 |u|^2 r^2 dr = \infty$ ausfällt, es liegt also in den Fällen $l = 1, 2, \ldots$ auch bei $r = 0$ der Grenzpunktfall vor und eine zusätzliche Randbedingung ist nicht zu stellen. Wenn aber $l = 0$, so gilt für alle Lösungen $\int_0^1 |u|^2 r^2 dr < \infty$, es liegt der Grenzkreisfall vor. Es gibt

eine unendliche Schar (mathematisch) möglicher Randbedingungen bei $r = 0$. Für jede Wahl dieser Randbedingung soll das Spektrum angegeben werden.

Für $\lambda \geqq 0$ liegt ein rein kontinuierliches Spektrum vor, das zeigt man wie üblich. Also $\lambda < 0$. Setzt man $\varrho = 2\sqrt{-\lambda}\, r$, $u(r) = e^{-\varrho/2} v(\varrho)$, so wird für $l = 0$ nach (52)

$$\varrho\, v'' + (2 - \varrho)\, v' - (1 - n)\, v = 0, \quad n = \frac{Z}{\sqrt{-\lambda}}. \tag{53}$$

Diese konfluente hypergeometrische Differentialgleichung besitzt ein Fundamentalsystem $v_{\infty,1}, v_{\infty,2}$, das sich bei $\varrho = \infty$ verhält wie ϱ^{n-1} und $e^{\varrho}\varrho^{-n-1}$. Da $\int_0^\infty |u|^2 r^2 dr < \infty$ sein muß, kann nur $u(r) = K e^{-\varrho/2} v_{\infty,1}(\varrho)$ sein, unter K eine Konstante verstanden. Wir benötigen die Entwicklung von $v_{\infty,1}(\varrho)$ in der Umgebung von $\varrho = 0$. Für die etwas allgemeinere Differentialgleichung $\varrho\, v'' + (\gamma - \varrho)\, v' - \beta v = 0$, wobei $\gamma = 1, 2, \ldots$ sein kann, hat das entsprechende $v_{\infty,1}(\varrho)$ die Gestalt[12])

$$v_{\infty,1}(\varrho) = \frac{1}{\Gamma(\beta-\gamma+1)\,\Gamma(\beta)} \Big\{ \varrho^{1-\gamma} \sum_{\nu=0}^{\gamma-2} \frac{(-\varrho)^\nu}{\nu!}\, \Gamma(\gamma-1-\nu)\, \Gamma(\beta-\gamma+\nu+1) +$$
$$+ (-1)^\gamma \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varrho^\nu}{\nu!\,(\gamma-1+\nu)!}\, \Gamma(\beta+\nu)\, [\Psi(\beta-1+\nu) -$$
$$- \Psi(\gamma-1+\nu) - \Psi(\nu) + \log\varrho] \Big\},$$

wobei $\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)}$ gesetzt ist und die endliche Summe $\sum_{\nu=0}^{\gamma-2}$ durch Null zu ersetzen ist für $\gamma = 1$. Verwendet man diese Formel für $\gamma = 2$, $\beta = 1 - n$, so wird[13])

$$u(r) = K e^{-\varrho/2} v_{\infty,1}(\varrho) = \frac{K}{\Gamma(-n)} \Big\{ -\frac{1}{2Z}\,\frac{1}{r} + \Psi(-n) + \frac{1}{2n} - \log n + \tag{55}$$
$$+ 2C - 1 + \log(2Z) + \log r + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu r^\nu + b_\nu r^\nu \log r) \Big\}.$$

Denkt man sich $u(r)$ mit Hilfe eines im Sinne von (12) und (14) genormten Fundamentalsystems $\psi(r)$, $\omega(r)$ geschrieben in der Form $u(r) = u_0 \psi(r) +$

---

[12]) A. Kienast, Untersuchungen über die Lösungen der Differentialgleichung $xy'' + (\gamma - x)\, y' - \beta\, y = 0$. Denkschriften der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft **57** (1921), Formel (26) von S. 260 in Verbindung mit Formel (5), S. 249; bei Formel (5) muß in der zweiten Zeile der Faktor $x^{\gamma-1}$ gestrichen werden; H. Buchholz, Die konfluente hypergeometrische Funktion .... Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. **23**, Formel (26) von S. 52. Bei beiden Autoren bedeutet $\Psi(x)$ die Funktion $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

[13]) Die ersten Glieder in der Entwicklung von $u(r)$ sind auch angegeben bei A. Sommerfeld, Zur Theorie der Feinstruktur des Wasserstoffs. Zeitschr. f. Phys. **11**

$+ u_1\omega(r)$, so sind u_0 der Koeffizient von $\frac{1}{r}$ und u_1 das konstante Glied in der Entwicklung (55). Die Randbedingung $u_0 \cos\alpha + u_1 \sin\alpha = 0$ heißt also

$$\frac{1}{2Z}\operatorname{ctg}\alpha - \log(2Z) = \Psi(-n) + \frac{1}{2n} - \log n + 2C - 1. \tag{56}$$

Setzt man $\frac{1}{2Z}\operatorname{ctg}\alpha - \log(2Z) = \frac{1}{\varepsilon}$, $\Psi(-n) + \frac{1}{2n} - \log n + 2C - 1 = F(n)$, so handelt es sich um die Gleichung

$$\frac{1}{\varepsilon} = F(n), \tag{57}$$

der bei gegebenem ε jedes n, das zu einem Eigenwert führen soll, genügen muß. Wegen $F'(n) = -\Psi'(-n) - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n}$ fällt $F(n)$ in jedem Intervall $g < n < g+1$, $g = 0, 1, 2, \ldots$ monoton von $+\infty$ nach $-\infty$; man kann sich also bequem graphisch einen Überblick über alle Wurzeln $n = n(\varepsilon)$ von (57) verschaffen. Insbesondere gibt es für $\nu = 1, 2, \ldots$ Wurzeln $n(\varepsilon)$, welche in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$ regulär analytisch von ε abhängen und für welche $n_\nu(0) = \nu$ ist. Da $\frac{dn_\nu(\varepsilon)}{d\varepsilon} = 1$ für $\varepsilon = 0$ gilt, ist $n_\nu(\varepsilon) = \nu + \varepsilon +$ höhere Potenzen von ε in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$. Diese Funktionen $n_\nu(\varepsilon)$ lassen sich über alle reellen ε von $-\infty < \varepsilon < \infty$ analytisch fortsetzen. Für $\varepsilon = 0$ stellen sie die üblichen positiven ganzen Zahlen dar; $\varepsilon = 0$ oder $\alpha = 0$ entspricht der üblicherweise zugrunde gelegten Randbedingung bei $r = 0$. Für $\varepsilon < 0$ sind die $n_\nu(\varepsilon)$, $\nu = 1, 2, \ldots$ zugleich *alle* Wurzeln von (57); es ist $n_\nu(\varepsilon) < \nu$ für alle negativen ε, daher sind auch alle zugehörigen Eigenwerte $\lambda_\nu(\varepsilon) = -\frac{Z^2}{n_\nu^2(\varepsilon)}$ kleiner als die Eigenwerte $\lambda_\nu(0)$. Für $\varepsilon > 0$ gibt es außer den $n_\nu(\varepsilon)$, $\nu = 1, 2, \ldots$ noch eine Wurzel $n_0(\varepsilon)$ zwischen 0 und 1. Wegen $\lim_{\varepsilon \to 0} n_0(\varepsilon) = 0$ wird $\lambda_0(\varepsilon) = -\frac{Z^2}{n_0^2(\varepsilon)}$ gegen $-\infty$ rücken, wenn ε gegen Null geht[14]). Für sehr kleine positive ε ist näherungsweise $n_0(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$. Für alle $\varepsilon > 0$ ist $n_\nu(\varepsilon) > \nu$, also $\lambda_\nu(\varepsilon) > \lambda_\nu(0)$, $\nu = 1, 2, \ldots$. Die regulär analytisch von ε abhängenden Eigenwerte erscheinen bei positivem ε gehoben, bei negativem ε gesenkt.

1941), vgl. die Formeln (a), (c), (d), (e) S. 305 und 306. Der Vergleich mit unserer Formel (55) zeigt, daß in Formel (d) der Ausdruck $\Psi(-n)$ zu ersetzen ist durch $\Psi(-n-1)$.

[14]) Mit dem Vorkommen solcher nicht regulären „gestörten" Eigenwerte habe ich mich auseinandergesetzt in der fünften Mitteilung meiner Störungstheorie der Spektralzerlegung. Math. Annalen **118** (1942).

Was bedeutet eine Randbedingung von der Form (56) bzw. (57) physikalisch? Man denke sich das Kepler-Problem gestellt mit dem Potential[15]

$$(58) \quad V(r) = -\frac{Z e^2}{r a} \text{ in } s < r < \infty \quad \text{und} \quad V(r) = -\frac{Z e^2}{b(s) a} \text{ in } 0 < r < s$$

das in dem kleinen Bereich $0 < r < s$ konstant ist. Mit diesem Potential berechne man auf die übliche Weise die Lösung U der (radialen) Schrödingergleichung ($l = 0$); U ist also eine stetige Funktion auch noch in $r = 0$, die von s abhängt und die nicht identisch verschwinden soll. Behauptet wird, wenn man U mit einer geeigneten Konstanten $c(s)$ multipliziert, so ist $\lim_{s \to 0} c(s) U = u(r)$ für $0 < r < \infty$ eine nicht identisch verschwindende Lösung der Schrödingerschen Gleichung ($l = 0$) mit dem Potential $\Phi = -\frac{Z e^2}{r a}$ in $0 < r < \infty$, welche der Randbedingung (56) bzw. (57) mit dem vorgeschriebenen ε genügt. Dazu muß natürlich $b(s)$ geeignet gewählt werden. Man kann setzen

$$b(s) = \frac{8Z}{\pi^2} s^2 \Big(1 - \frac{16Z}{\pi^2} s - \frac{16Z}{\pi^2} s \log(2Zs) - \frac{16Z}{\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} s\Big).$$

Der Nachweis erfolgt ähnlich den Überlegungen in § 3, ich übergehe ihn.

Wie man auch das Vorzeichen oder die Größe von ε wählt, immer ist $b(s)$ für genügend kleines s positiv, also V in (58) überall negativ. Denkt man sich das Potential V aus dem Potential Φ durch einen Zusatz entstanden, so entspricht dieses zusätzliche Potential offenbar einer anziehenden Kraft, und zwar sowohl bei positivem wie bei negativem ε. Die Randbedingung (57) kommt erst in der Grenze für $s \to 0$ zustande, daher nenne ich die zusätzliche Kraft eine *Einzelkraft*: wegen der oben geschilderten Wirkung auf das Spektrum eine *hebende Einzelkraft*, wenn $\varepsilon > 0$, und eine *senkende Einzelkraft*, wenn $\varepsilon < 0$; in beiden Fällen handelt es sich um eine anziehende Einzelkraft. Die gewöhnliche Behandlung der Schrödingerschen Gleichung ergibt sich, wenn man annimmt, daß *keine* solche Einzelkraft im Kern wirkt ($\varepsilon = 0$).

Die (mathematische) Willkür in der Auswahl einer Randbedingung bei $r = 0$ für den radialen Anteil der Wellenfunktion im S-Zustand ($l = 0$) entfällt, wenn man an Stelle von (52) die relativistisch invarianten Gleichungen nach Dirac benutzt:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dr} + \frac{1-k}{r} u - \frac{2\pi}{hc}\Big(E + \frac{Ze^2}{r} + mc^2\Big) v = 0 \\ \frac{dv}{dr} + \frac{1+k}{r} v + \frac{2\pi}{hc}\Big(E + \frac{Ze^2}{r} - mc^2\Big) u = 0 \end{aligned} \qquad 0 < r < \infty.$$

Es bedeutet r [anders als in (52)] die Entfernung Elektron—Kern; E ist der Eigenwertparameter, k eine der Zahlen $\pm 1, \pm 2, \ldots$. Das Normierungs-

[15]) Es ist ra (nicht r) die Entfernung Elektron—Kern; $b(s)$ ist eine reine Zahl

ntegral ist $\int_0^\infty (|u|^2 + |v|^2) r^2 dr$. Da es immer eine Lösung u, v gibt, für welche $\int_0^\infty (|u|^2 + |v|^2) r^2 dr = \infty$ ausfällt, liegt bei $r = \infty$ der Grenzpunktfall vor und man hat bei $r = \infty$ keine zusätzliche Randbedingung zu stellen[16]). Bei $r = 0$ liegt eine Stelle der Bestimmtheit. Setzt man an: $u = a_0 r^\gamma + \cdots$, $v = b_0 r^\gamma + \cdots$, $|a_0| + |b_0| > 0$, so erhält man für γ die beiden Zahlen $\gamma_1 = -1 + \sqrt{k^2 - \alpha^2 Z^2}$, $\gamma_2 = -1 - \sqrt{k^2 - \alpha^2 Z^2}$ mit $\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc}$. Es ist $\int_0^1 r^{2\gamma_2} r^2 dr = \int_0^1 r^{-2\sqrt{k^2 - \alpha^2 Z^2}} dr = \infty$ für jeden Wert $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, solange nur $-2\sqrt{1 - \alpha^2 Z^2} < -1$, d. h. $Z < \sqrt{\frac{3}{4}} \frac{1}{\alpha}$ ist. Also ist in diesem Falle $u = a_0 r^{\gamma_2} + \cdots, v = b_0 r^{\gamma_2} + \cdots$ eine Lösung mit $\int_0^1 (|u|^2 + |v|^2) r^2 dr = \infty$. Es liegt auch bei $r = 0$ für jeden erlaubten Wert von k der Grenzpunktfall vor und eine zusätzliche Randbedingung ist auch bei $r = 0$ nicht zu stellen, jedenfalls solange zwischen Kernladungszahl Z und Feinstrukturkonstante α die Beziehung $Z < \sqrt{\frac{3}{4}} \frac{1}{\alpha}$ besteht.

---

[16]) Unter der Annahme, daß das oben für Differentialgleichungen zweiter Ordnung Ausgeführte auch für Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung gilt.

(Eingegangen am 25. August 1943.)

Über die Mittelwerte der Funktionen eines Orthogonalsystems.

Von

Georg Gunther Lorentz in Tübingen.

Wir betrachten hier Systeme von normierten Orthogonalfunktionen $\{\varphi_n(t)\}$ im Intervall (a, b). Wir beweisen, daß für gewisse Limitierungsverfahren die Funktionen $\varphi_n(t)$ des Systems fast überall im Grundintervall (a, b) gegen Null limitierbar sind. Als einfachste Tatsache dieser Art kann gelten:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx}{n} = 0 \qquad (x \neq 2\pi),$$

$\left(\text{der Bruch ist sogar } O\left(\frac{1}{n}\right)!\right)$, die auch so formuliert werden kann: Für fast alle t ist $\cos n t$ durch das Cesàrosche Verfahren erster Ordnung C_1 gegen Null limitierbar. Ähnliche (und noch schärfere) Aussagen können aber für ein beliebiges Orthogonalsystem gemacht werden.

Wir beginnen mit einer Abschätzung der Funktionen $\varphi_n(t)$. Es sei c_n das n-te Glied einer konvergenten Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit positiven Gliedern. Dann gilt fast überall in (a, b)[1]:

$$\varphi_n(t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{c_n}}\right). \tag{1}$$

In der Tat, die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(t)^2$ konvergiert fast überall, denn

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(t)^2 \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b \varphi_n(t)^2 \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n < +\infty.$$

Daraus folgt fast überall $c_n \varphi_n(t)^2 \to 0$, was mit (1) gleichbedeutend ist. Als Folgerung haben wir fast überall in (a, b):

$$\varphi_n(t) = o\left(\sqrt{n} \log^{\frac{1}{2}+\varepsilon} n\right) = o\left(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) \tag{2}$$

für jedes $\varepsilon > 0$.

Die Cesàroschen Mittel α-ter Ordnung für eine Folge $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ werden definiert durch

$$\sigma_n^{\alpha} = \frac{1}{A_n^{\alpha}} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} x_k.$$

[1]) H. Rademacher, Math. Ann. 87 (1922), S. 112—138.

ier bedeutet

$$A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n} = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}{n!} \approx \frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

t nun $\sigma_n^\alpha \to a$, so heißt die Folge $\{x_n\}$ gegen den Grenzwert a C_α-limitierbar:

$$C_\alpha\text{-lim } x_n = a.$$

Wir werden jetzt beweisen, daß für die Funktionen $\varphi_n(t)$ eines normierten rthogonalsystems fast überall gilt: C_α-lim $\varphi_n(t) = 0$ für $\alpha > \frac{1}{2}$. Es gilt gar noch etwas mehr:

Satz 1. *$\{a_n\}$ sei eine beschränkte Folge von reellen Zahlen, $|a_n| \leqq M$, und $\varphi_n(t)\}$ ein normiertes Orthogonalsystem. Dann ist fast überall:*

$$C_\alpha\text{-lim } a_n \varphi_n(t) = 0 \qquad (\alpha > \tfrac{1}{2}).$$

Beweis. Wir können annehmen, daß $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. Für die Summen

$$\sigma_n(t) = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} a_k \varphi_k(t)$$

aben wir, da $2\alpha - 2 > -1$ ist,

$$\int_a^b \sigma_n(t)^2\, dt = \frac{1}{(A_n^\alpha)^2} \sum_{k=0}^{n} (A_{n-k}^{\alpha-1} a_k)^2 \leqq \frac{C_1 M^2}{n^{2\alpha}} \sum_{k=1}^{n} k^{2\alpha-2}$$
$$\leqq \frac{C_2 M^2}{n^{2\alpha}} n^{2\alpha-1} = \frac{C_2 M^2}{n}$$

ier und weiter bedeuten C_1, C_2 usw. absolute Konstanten). Es sei $\varepsilon > 0$, $= [k^{1+\varepsilon}]$ (ε wird später festgelegt werden). Dann wird

$$\int_a^b \sigma_{n_k}(t)^2\, dt = O\left(\frac{1}{k^{1+\varepsilon}}\right),$$

so

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b \sigma_{n_k}^2\, dt < +\infty,$$

lglich $\sigma_{n_k}(t) \to 0$ fast überall.

Wir betrachten jetzt die Summe σ_n für Werte von n, die der Ungleichung

$$k^{1+\varepsilon} \leqq n < (k+1)^{1+\varepsilon}$$

enügen. Dann ist

$$\sigma_n(t) - \sigma_{n_k}(t) = \sum_{\nu=0}^{n_k} \left(\frac{A_{n-\nu}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} - \frac{A_{n_k-\nu}^{\alpha-1}}{A_{n_k}^\alpha}\right) a_\nu \varphi_\nu(t) +$$

$$+ \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{\nu=n_k+1}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} a_\nu \varphi_\nu(t) = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2.$$

Wir wollen zuerst die Summe Σ_1 abschätzen. Zu diesem Zwecke betrachten wir die Differenz

$$c_{p-1,\nu} - c_{p,\nu}, \qquad (p > \nu$$

wo

$$c_{p,\nu} = \frac{A_{p-\nu}^{\alpha-1}}{A_p^\alpha}$$

gesetzt wurde. Aus (3) folgt

$$A_p^\alpha = \frac{p+\alpha}{p} A_{p-1}^\alpha$$

und deshalb

$$\begin{aligned} c_{p-1,\nu} - c_{p,\nu} &= \frac{1}{A_p^\alpha A_{p-1}^\alpha} \left(A_p^\alpha A_{p-1-\nu}^{\alpha-1} - A_{p-1}^\alpha A_{p-\nu}^{\alpha-1}\right) \\ &= \frac{A_{p-1-\nu}^{\alpha-1}}{A_p^\alpha} \left(\frac{p+\alpha}{p} - \frac{p-\nu+\alpha-1}{p-\nu}\right) = \frac{A_{p-1-\nu}^{\alpha-1}}{A_p^\alpha} \frac{p-\alpha\,\nu}{p\,(p-\nu)} \\ &\leqq \frac{A_{p-1-\nu}^{\alpha-1}}{A_p^\alpha} \frac{1}{p-\nu} \leqq C_3 \frac{1}{p^\alpha (p-\nu)^{2-\alpha}}. \end{aligned}$$

Auf Grund dieser Abschätzung haben wir:

$$0 \leqq c_{n_k,\nu} - c_{n,\nu} \leqq C_3 \sum_{p=n_k+1}^{n} \frac{1}{p\ (p-\nu)^{2-\alpha}} \leqq \frac{C_3}{(n_k+1-\nu)^{2-\alpha}} \sum_{p=n_k+1}^{n} \frac{1}{p^\alpha}.$$

Die letzte Summe ist

$$\begin{aligned} O\left(n^{1-\alpha} - (n_k+1)^{1-\alpha}\right) &= O\left(n_{k+1}^{1-\alpha} - n_k^{1-\alpha}\right) \\ &= O\left((k+1)^{(1+\varepsilon)(1-\alpha)} - k^{(1+\varepsilon)(1-\alpha)}\right) = O\left(k^{-\alpha(1+\varepsilon)+\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Infolgedessen haben wir

$$0 \leqq c_{n_k,\nu} - c_{n,\nu} \leqq \frac{C_4}{(n_k+1-\nu)^{2-\alpha}} k^{-\alpha(1+\varepsilon)+\varepsilon}.$$

Jetzt können wir die Summe Σ_1 abschätzen. Nach Formel (2) haben wir Für fast alle $t \in (a, b)$ gibt es eine Konstante $K = K_t$, für welche

$$|\varphi_\nu(t)| < K\,(\nu+1)^{\frac{1}{2}+\delta} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots$$

ist. Die Zahl $\delta > 0$ wird sogleich genauer festgelegt werden. Es ist

$$\begin{aligned} \left|\sum\nolimits_1\right| &\leqq C_4 M K \sum_{\nu=0}^{n_k} \frac{k^{-\alpha(1+\varepsilon)+\varepsilon}}{(n_k+1-\nu)^{2-\alpha}} (\nu+1)^{\frac{1}{2}+\delta} \\ &\leqq C_4 M K (n_k+1)^{\frac{1}{2}+\delta} k^{-\alpha(1+\varepsilon)+\varepsilon} \sum_{\nu=1}^{n_k+1} \frac{1}{\nu^{2-\alpha}} \leqq C_5 M K k^{(1+\varepsilon)(\frac{1}{2}+\delta)} k^{-\alpha(1+\varepsilon)} \\ &= C_5 M K k^{-(\alpha-\frac{1}{2})(1+\varepsilon)+\varepsilon+\delta(1+\varepsilon)} \end{aligned}$$

Wenn wir ε und δ genügend klein wählen, wird der Exponent negativ nd wir haben $\Sigma_1 \to 0$ fast überall.

Wir machen jetzt Gebrauch von dem folgenden Hilfssatz von H. RADEACHER: Für jede endliche Gruppe von reellen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und n normiertes Orthogonalsystem $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ existiert eine meßbare unktion $\delta(t)$, für welche

$$1. \quad \Big|\sum_{\nu=p}^{q} a_\nu \varphi_\nu(t)\Big| \leqq \delta(t), \qquad 1 \leqq p \leqq q \leqq n,$$

$$2. \quad \int_a^b \delta(t)^2\, dt \leqq A \log^2 n \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2,$$

o A eine absolute Konstante ist[2]).

Es sei jetzt $\delta_k(t)$ die RADEMACHERsche Funktion, die den Koeffizienten $_{k}+1}, \ldots, a_{n_{k+1}}$ und den Funktionen $\varphi_{n_{k}+1}(t), \ldots, \varphi_{n_{k+1}}(t)$ entspricht. Die ahlen $A_k^{\alpha-1}$ sind monoton, positiv, und $\leqq 1$. Von der ABELschen Transormation Gebrauch machend, sehen wir, daß $|\Sigma_2|$ das $\frac{2}{A_n^\alpha}$-fache des größten bsoluten Betrages der Summe

$$\sum_{\nu=n_k+1}^{p} a_\nu \varphi_\nu(t)$$

ür $n_k < p \leqq n$ nicht übersteigt. Es ist also

$$|\Sigma_2| \leqq \frac{2}{A_n^\alpha}\, \delta_k(t) \leqq C_6\, \frac{\delta_k(t)}{k^{(1+\varepsilon)\alpha}} = C_6\, \Delta_k(t).$$

Nun ist nach 2.

$$\int_a^b \Delta_k(t)^2\, dt \leqq \frac{1}{k^{2\alpha(1+\varepsilon)}} A \log^2(n_{k+1} - n_k) \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} a_\nu^2$$

$$\leqq \frac{A M^2}{k^{2\alpha(1+\varepsilon)}} (n_{k+1} - n_k) \log^2(n_{k+1} - n_k).$$

a aber $n_{k+1} - n_k = O(k^\varepsilon)$, wird

$$\int_a^b \Delta_k(t)^2\, dt = O\left(\frac{k^\varepsilon \log^2 k}{k^{2\alpha(1+\varepsilon)}}\right) = O\left(\frac{k^{2\varepsilon}}{k^{2\alpha(1+\varepsilon)}}\right) = O\left(\frac{1}{k^{2\alpha - 2\varepsilon(1-\alpha)}}\right)$$

Vir verlangen, daß ε so klein ist, daß

$$2\alpha - 2\varepsilon(1-\alpha) > 1.$$

Dann konvergiert die Reihe $\Sigma \int \Delta_k^2\, dt$, es ist also $\Delta_k(t) \to 0$ fast überall. amit ist der Satz bewiesen.

---

[2]) Vgl. KACZMARZ und STEINHAUS, Theorie der Orthogonalreihen, Warschau 936, S. 162.

Für $\alpha = \frac{1}{2}$ ist der Satz nicht mehr richtig. Es gibt vielmehr, wie am End dieser Arbeit gezeigt wird, normierte Orthogonalsysteme $\{\varphi_n(t)\}$, für welch $C_{\frac{1}{2}}\text{-lim } \varphi_n(t) = 0$ nirgends erfüllt ist.

Jetzt gehen wir zu der Betrachtung eines speziellen Orthogonalsystem über, und zwar des Systems von RADEMACHER, welches aus den Funktione

$$r_n(t) = \text{sign sin } (2^{n+1}\pi t) \quad 0 \leqq t \leqq 1 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots$$

besteht. Für dieses System, das in Zusammenhang mit der Theorie de dyadischen Brüche steht, werden wir eine Verschärfung des Satzes 1 be weisen. Wir brauchen zuerst einige Abschätzungen.

Hilfssatz 1. Für alle natürlichen n und $0 \leqq t \leqq 1$ gilt:

$$\sum_{\substack{0 \leqq k \leqq n \\ \frac{k}{n} - t > n^{-\frac{1}{3}}}} C_n^k t^k (1-t)^{n-k} < \frac{A}{n^s},$$

wo s eine beliebige positive Zahl ist, und A nur von s abhängt[3]).

Hilfssatz 2. Es seien n, k, $(k \leqq n)$, $m_1 < \cdots < m_k$ natürliche Zahlen s eine beliebige positive Zahl. Dann hat die Menge der Punkte des Inter valls $(0, 1)$, für welche die Ungleichung

$$|r_{m_1}(t) + r_{m_2}(t) + \cdots + r_{m_k}(t)| \leqq 2\, n^{\frac{2}{3}} \tag{4}$$

nicht erfüllt ist, ein Maß $\leqq \frac{A'}{n^s}$ (A' hängt nur von s ab).

Beweis. Sind $\varepsilon_i = \pm 1$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ beliebige Vorzeichen, s sind die Gleichungen

$$r_{m_1}(t) = \varepsilon_1, \ \ldots, \ r_{m_k}(t) = \varepsilon_k$$

simultan auf einer Menge vom Maß $\frac{1}{2^k}$ erfüllt. Deshalb ist die Gleichun

$$S(t) = r_{m_1}(t) + \cdots + r_{m_k}(t) = 2l - k, \quad 0 \leqq l \leqq k,$$

welche besagt, daß genau l von den Summanden gleich $+1$ sind und $k -$ gleich -1, auf einer Menge vom Maß

$$C_k^l \frac{1}{2^k}$$

erfüllt. Es sei E die Menge, wo $|S(t)| > 2\, n^{\frac{2}{3}}$ gilt. Nach dem oben Gesagten is

$$m\,E = \sum_{\substack{0 \leqq l \leqq k \\ |2l-k| > 2\, n^{\frac{2}{3}}}} C_k^l \frac{1}{2^k} = \sum_{\substack{0 \leqq l \leqq k \\ \left|\frac{l}{k} - \frac{1}{2}\right| > \frac{n^{\frac{2}{3}}}{k}}} C_k^l \frac{1}{2^k},$$

[3]) Wegen des Beweises vgl. z. B. LORENTZ, Rec. math. Moskau (2) 2 (1937 S. 543—556.

nd da $\frac{n^{\frac{2}{3}}}{k} \geqq k^{-\frac{1}{3}}$,

$$m E \leqq \sum_{\left|\frac{l}{k}-\frac{1}{2}\right| > k^{-\frac{1}{3}}} C_k^l \frac{1}{2^k}.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $\geqq 2 n^{\frac{2}{3}}$ ist [denn sonst wäre die Beziehung (4) überall erfüllt]. Dann haben ir nach Hilfssatz 1 mit $t = \frac{1}{2}$ und $\frac{3s}{2}$ statt s:

$$m E \leqq \frac{A}{k^{\frac{3s}{2}}} \leqq \frac{A}{2^{\frac{3s}{2}} n^s} = \frac{A'}{n^s}.$$

Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

Der nächste Hilfssatz behandelt die Koeffizienten der Cesàroschen Transformation C_α für $0 < \alpha < 1$.

Hilfssatz 3. Es sei ε eine feste Zahl, $0 < \varepsilon < 1$. Für jedes natürliche setzen wir

$$k_i = [\varepsilon n] + i\left[\sqrt{n}\right] \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

nd definieren die Zahl s durch

$$k_s \leqq n < k_{s+1},$$

o daß offenbar $s \leqq \sqrt{n} + 2$ ist.

Dann gibt es, für genügend große n, Zahlen B_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ für die

1. $B_k = 0$ für $0 \leqq k < k_0$.
2. B_k ist konstant für $k_i \leqq k < k_{i+1}$ $\qquad (i = 0, 1, \ldots, s)$.
3. $\sum_{k=0}^{n} \left| \frac{A_k^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} - B_k \right| < \varepsilon^\alpha + \varepsilon.$

Beweis. Wir setzen $B_k = 0$ für $k < k_0$ und

$$B_k = \frac{A_{k_i}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} \text{ für } k_i \leqq k < k_{i+1} \qquad (i = 0, 1, \ldots, s).$$

Es ist

$$0 \leqq A_k^{\alpha-1} - A_{k+1}^{\alpha-1} = A_k^{\alpha-1}\left(1 - \frac{\alpha-1+k+1}{k+1}\right) = \frac{1-\alpha}{k+1} A_k^{\alpha-1} < \frac{1-\alpha}{k} A_k^{\alpha-1}.$$

Wenn wir solche Ungleichungen addieren, erhalten wir für $l > k$:

$$0 \leqq A_k^{\alpha-1} - A_l^{\alpha-1} \leqq \frac{1-\alpha}{k} A_k^{\alpha-1} + \frac{1-\alpha}{k+1} A_{k+1}^{\alpha-1} + \ldots + \frac{1-\alpha}{l-1} A_{l-1}^{\alpha-1}$$
$$\leqq \frac{(1-\alpha)(l-k)}{k} A_k^{\alpha-1}.$$

Daraus folgt weiter:

$$\sum_{l=k}^{k'} (A_k^{\alpha-1} - A_l^{\alpha-1}) \leqq \frac{1-\alpha}{k} A_k^{\alpha-1} \sum_{p=0}^{k'-k} p$$

$$= \frac{1-\alpha}{k} A_k^{\alpha-1} \frac{(k'-k)(k'-k+1)}{2} \leqq C_1 \frac{(k'-k)^2}{k^{2-\alpha}},$$

wo C_1 (und weiter $C_2, \ldots$) eine Konstante ist. Jetzt können wir die Summe 3. abschätzen:

$$\sum_{k=0}^{n} \left| \frac{A_k^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}} - B_k \right| \leqq \frac{1}{A_n^{\alpha}} \sum_{k=0}^{[\varepsilon n]} A_k^{\alpha-1} + \frac{1}{A_n^{\alpha}} \sum_{i=0}^{s} \sum_{k=k_i}^{k_{i+1}} (A_{k_i}^{\alpha-1} - A_k^{\alpha-1})$$

$$\leqq \frac{A_{[\varepsilon n]}^{\alpha}}{A_n^{\alpha}} + \frac{1}{A_n^{\alpha}} \sum_{i=0}^{s} C_1 \frac{(k_{i+1}-k_i)^2}{k_i^{2-\alpha}}.$$

Das erste Glied hat den Grenzwert ε^{α} für $n \to \infty$; das zweite ist nicht größer als

$$\frac{C_2 n}{n^{\alpha}} \sum_{i=0}^{s} \frac{1}{k_i^{2-\alpha}} \leqq \frac{C_2 s}{n^{\alpha-1}} \frac{1}{k_0^{2-\alpha}} \leqq \frac{C_3 \sqrt{n}}{n^{\alpha-1} (\varepsilon n)^{2-\alpha}} = \frac{C_3}{\varepsilon^{2-\alpha} \sqrt{n}}.$$

Wir sehen also, daß 3. wirklich besteht für hinreichend großes n.

Satz 2. *Ist $\{a_n\}$ eine beschränkte Folge von reellen Zahlen, $\{r_n(t)\}$ das* Rademachersche *Orthogonalsystem, so ist für $\alpha > 0$ fast überall*

$$C_{\alpha}\text{-}\lim a_n r_n(t) = 0.$$

Beweis. Es genügt, $0 < \alpha < 1$ vorauszusetzen. Außerdem kann angenommen werden, daß die Zahlen a_n nur die Werte 0 und 1 annehmen. In der Tat, führen wir im Raume aller beschränkten Zahlenfolgen $a = \{a_n\}$ die Norm

$$\|a\| = \sup_n |a_n|$$

ein, so läßt sich jede solche Folge durch lineare Kombinationen der Folgen $e = \{e_n\}$ der oben angegebenen Art beliebig gut appromieren[4]). Ist der Satz für die Folgen e bewiesen, so gilt er auch für ihre linearen Kombinationen. Infolgedessen unterscheidet sich $\{a_n r_n(t)\}$ fast überall beliebig wenig (im Sinne der eingeführten Norm) von einer gegen Null C_{α}-limitierbaren Folge, ist also selbst fast überall gegen Null C_{α}-limitierbar.

[4]) Ist $-L < a_n < L$, $\delta = \frac{2L}{m}$, und setzen wir $e_n^{(p)} = 1$, wenn a_n der Ungleichung $l_p = -L + (p-1)\delta \leqq a_n < -L + p\delta$ genügt, $e_n^{(p)} = 0$ im entgegengesetzten Falle, $p = 1, 2, \ldots, m$, so sind $e^{(p)} = \{e_n^{(p)}\}$ Folgen, deren Glieder nur die Werte 0 und 1 annehmen, und es ist

$$\left\| a - \sum_{p=1}^{m} l_p e^{(p)} \right\| \leqq \delta.$$

Dieses angenommen, betrachten wir die Cesàrosche Summe

$$\sigma_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}} a_{n-k} r_{n-k}(t).$$

Wir wählen ein festes $\varepsilon > 0$ und führen noch die Funktion

$$\tau_n(t) = \sum_{k=0}^{n} B_k a_{n-k} r_{n-k}(t)$$

n, wobei die Zahlen B_k nach dem Hilfssatz 3 gewählt werden.
Wir haben dann:

$$|\tau_n(t)| \leqq \sum_{i=0}^{s-1} B_{k_i} \left| \sum_{k=k_i}^{k_{i+1}-1} a_{n-k} r_{n-k}(t) \right| + B_{k_s} \left| \sum_{k=k_s}^{n} a_{n-k} r_{n-k}(t) \right|.$$

Da die Folge $\{a_n\}$ eine e-Folge ist, folgt aus Hilfssatz 2

$$\left| \sum_{k=k_i}^{k_{i+1}-1} a_{n-k} r_{n-k}(t) \right| \leqq 2 (k_{i+1} - k_i)^{\frac{2}{3}} \geqq C_4 \frac{k_{i+1} - k_i}{n^{\frac{1}{6}}},$$

bgesehen von einer Menge, deren Maß nicht größer als $\frac{A'}{(k_{i+1} - k_i)^5} \leqq \frac{C_5}{n^{\frac{5}{2}}}$

t. Daraus folgt, daß das erste Glied in (5) kleiner als

$$\frac{C_4}{n^{\frac{1}{6}}} \sum_{i=0}^{s-1} B_{k_i} (k_{i+1} - k_i) \leqq \frac{C_4}{n^{\frac{1}{6}}} \sum_{k=0}^{n} B_k \leqq \frac{C_4}{n^{\frac{1}{6}}} (1 + \varepsilon^{\alpha} + \varepsilon)$$

t, abgesehen von einer Menge, deren Maß nicht größer als

$$\frac{C_5 s}{n^{\frac{5}{2}}} \leqq \frac{C_6}{n^2}.$$

ndlich ist das letzte Glied in (5) kleiner als

$$B_{k_s} (n - k_s) = \frac{A_{k_s}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}} (n - k_s) \leqq \frac{C_7}{\sqrt{n}}.$$

araus folgt auf gewöhnliche Weise, daß fast überall

$$\lim_{n \to \infty} \tau_n(t) = 0.$$

um Schluß haben wir nach 3., Hilfssatz 3

$$|\sigma_n(t) - \tau_n(t)| \leqq \varepsilon^{\alpha} + \varepsilon,$$

oraus folgt, daß fast überall $\lim_{n \to \infty} \sigma_n(t) = 0$ ist, und der Satz ist bewiesen.

Man kann diesem Satz folgende wahrscheinlichkeitstheoretische Form eben:

Satz 2*. *$\{a_n\}$ sei eine beschränkte Folge von reellen Zahlen. Wenn die Vorzeichen $\varepsilon_n = \pm 1$ durch Zufall bestimmt werden, so kann man mit der Wahrscheinlichkeit 1 behaupten, daß die Folge $\{\varepsilon_n a_n\}$ durch das Cesàrosche Verfahren C_α jeder positiven Ordnung $\alpha > 0$ gegen Null limitierbar ist.*

Diese Behauptung soll wie folgt verstanden werden. Ist $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}$ eine Folge von Vorzeichen, so ist $e = \{e_n\} = \left\{\frac{\varepsilon_n + 1}{2}\right\}$ eine Folge von Nullen und Einsen. Jeder solchen Folge ordnen wir die Zahl t des Intervalls $(0, 1)$ zu die durch die dyadische Darstellung

$$t = 0, e_1 e_2 \ldots e_n \ldots \tag{6}$$

definiert ist. Dabei entsteht, von gewissen abzählbaren Mengen abgesehen eine eineindeutige Zuordnung der Punkte des Intervalls $(0, 1)$ und der Folgen e oder ε, also werden e_n und ε_n zu Funktionen von t. Der formulierte Satz hat folgenden Sinn: Für fast alle t ist die zugehörige Folge $\{\varepsilon_n a_n\}$ gegen Null C_α-limitierbar.

Man beweist leicht, daß $\varepsilon_n = \varepsilon_n(t) = -r_n(t)$. Folglich ist Satz 2* wie angekündigt, nur eine andere Form des Satzes 2.

Eine weitere Folgerung ist

Satz 3. *Wir betrachten die dyadischen Darstellungen* (6) *der Zahlen des Intervalls* $(0, 1)$. *Für fast alle t ist dann*

$$C_\alpha\text{-lim } e_n = \tfrac{1}{2}, \qquad (\alpha > 0)$$

Nach Satz 2 haben wir fast überall C_α-lim $r_n(t) = 0$, und die Beziehung $e_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} r_n(t)$ liefert sofort das Gewünschte.

Wir machen zum Schluß noch einige Bemerkungen. Wir wollen zuerst zeigen, daß *die Abschätzung* (1) *der Funktionen $\varphi_n(t)$ eines Orthogonalsystems die bestmöglichste ist.*

In der Tat, sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ eine divergente Reihe mit positiven Gliedern; ich will dann ein normiertes Orthogonalsystem $\{\varphi_n(t)\}$ im Intervall $(0, 1)$ konstruieren, für welches überall

$$\varphi_n(t) \neq o\left(\frac{1}{\sqrt{c_n}}\right).$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $c_n < 1$, $c_n \to 0$ angenommen werden. Die Zahlen n_k, $n_1 < n_2 < \cdots$ werden induktiv so bestimmt, daß

$$c_{n_{i-1}+1} + \cdots + c_{n_i} \leqq 1, \; c_{n_{i-1}+1} + \cdots + c_{n_i} + c_{n_i+1} > 1 \quad (n_{-1} = 0)$$

Anschließend werden die Funktionen $\varphi_n(t)$ induktiv bestimmt, und zwar so daß sie stückweise konstant sind. Wir setzen $\varphi_0(t) \equiv 1$. Sind nun die $\varphi_k(t)$ für $k < n$ bestimmt, so wählen wir i derart, daß $n_{i-1} < n \leqq n_i$, zerlegen das

ntervall $I_n = (c_{n_{i-1}+1} + \cdots + c_{n-1},\ c_{n_{i-1}+1} + \cdots + c_n)$ in endlich viele Teilintervalle (α, β); auf jedem von ihnen sollen alle $\varphi_k(t)$ für $k < n$ konstant sein. Wir setzen dann

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} +\frac{1}{\sqrt{c_n}} & \text{für} \quad \alpha < t < \frac{\alpha+\beta}{2}, \\ -\frac{1}{\sqrt{c_n}} & \text{für} \quad \frac{\alpha+\beta}{2} < t < \beta, \\ 0 & \text{für} \quad t \in (\alpha, \beta). \end{cases}$$

Die Funktionen $\varphi_n(t)$, auf einer abzählbaren Punktmenge passend ergänzt, genügen, wie man leicht sieht, allen gestellten Forderungen.

Es gibt, insbesondere, ein normiertes Orthogonalsystem $\{\varphi_n(t)\}$, für welches die Abschätzung

$$\varphi_n(t) = o\,(n^{\frac{1}{2}})$$

nirgends richtig ist.

Machen wir jetzt von der Tatsache Gebrauch, aus $C_\alpha\text{-lim}\, s_n = 0$ folgt $s_n = o\,(n^\alpha)$[5]), so sehen wir, daß für dieses System nirgends $C_{\frac{1}{2}}\text{-lim}\, \varphi_n(t) = 0$ sein kann. Damit ist unsere Bemerkung zu Satz 1 gerechtfertigt.

---

[5]) Es ist, wie man leicht beweist,

$$\frac{1}{A_n^\alpha}\, s_n = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{-\alpha-1} A_k^\alpha\, \sigma_k^\alpha.$$

Für die Koeffizienten dieser Transformation sind die TOEPLITZschen Bedingungen erfüllt:

$$\frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} \left| A_{n-k}^{-\alpha-1} A_k^\alpha \right| \leqq 2; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{A_{n-k}^{-\alpha-1} A_k^\alpha}{A_n^\alpha} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Aus $C_\alpha\text{-lim}\, s_n = 0$, d. h. $\sigma_n^\alpha \to 0$, folgt also $\frac{s_n}{A_n^\alpha} \to 0$, folglich ist $s_n = o\,(n^\alpha)$.

(Eingegangen am 13. September 1943.)

Über eine isoperimetrische Aufgabe von Erhard Schmidt, I[1]).

Von

Alexander Dinghas in Berlin.

Einleitung.

1. Vorliegende Abhandlung knüpft an die in dieser Zeitschrift erschienene Arbeit von Erhard Schmidt, „Über eine neue Methode zur Behandlung einer Klasse isoperimetrischer Aufgaben im Großen[2])“ an und hat als Gegenstand eine Verallgemeinerung zweier dort behandelter isoperimetrischer Probleme für Rotationskörper, die wir im folgenden als Problem I bzw. Problem II bezeichnen werden.

Im gewöhnlichen n-dimensionalen euklidischen Raum können diese beiden Probleme folgendermaßen formuliert werden:

Problem I. *Es sei im n-dimensionalen euklidischen Raum mit den rechtwinkligen Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ein Zylinder $\mathfrak{Z}_\varrho$ mit der Gleichung*

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = \varrho^2$$

gegeben.

Es soll unter allen Rotationskörpern $\mathfrak{K}$ um die x_n-Achse, welche außerhalb dieses Zylinders verlaufen, derjenige bestimmt werden, welcher bei vorgegebener Oberfläche das Maximum des eingeschlossenen Volumens besitzt.

Problem II. *Unter allen Rotationskörpern um die x_n-Achse, deren Projektion den Raum*

$$0 < a^2 < x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leqq b^2, \quad x_n = 0, \tag{1.1}$$

vollkommen ausfüllt, soll derjenige bestimmt werden, welcher bei gegebener Oberfläche das Maximum des eingeschlossenen Volumens liefert.

Was das Problem I anbetrifft, so wurde dieses in der genannten Arbeit von Erhard Schmidt für $n = 3$ behandelt und darüber hinaus ein entsprechendes Problem für den hyperbolischen Raum. Das Problem II ist ein spezieller Fall der dort allgemein behandelten Aufgabe und wurde hier besonders hervorgehoben, da dieses sich zusammen mit dem Problem I in einer Richtung weit verallgemeinern läßt.

[1]) Ein wesentlicher Teil dieser Arbeit wurde am 6. Juni 1942 in Tübingen vorgetragen.

[2]) Math. Zeitschr. **47** (1942), S. 489—642.

Diese Verallgemeinerung besteht darin, daß man in den beiden Problemen außer den Rotationskörpern noch alle diejenigen Körper als „zulässige" Körper betrachtet, deren Projektion im euklidischen Fall parallel zur x_n-Achse den Ring (1. 1) ausfüllt. Dadurch gestalten sich die beiden Probleme wesentlich schwieriger und gehören dann zur n-dimensionalen Variationsrechnung.

Außerdem werden die Aufgaben noch mittels geeigneter Wahl der Koordinaten einheitlich für alle Räume konstanter Krümmung und jede Dimensionszahl formuliert und gelöst.

2. Im vorliegenden ersten Teil der Arbeit beschränken wir uns allerdings auf das Problem II und machen zuerst über die Beschaffenheit der zulässigen Körper eine kleine einschränkende Voraussetzung, die im zweiten Teil der Arbeit mittels der Steiner-Symmetrisierung aufgehoben wird.

Der Klarheit wegen wollen wir hier die Voraussetzungen der zulässigen Körper für den euklidischen Fall zusammenfassen:

1. Der Körper $\mathfrak{K}$ ist ein im Sinne von Erhard Schmidt einfach zusammenhängender regulärer Körper[3]). Was ein regulärer Körper ist, wird später erklärt werden. Hier sei nur gesagt, daß ein regulärer Körper eine zusammenhängende abgeschlossene Mannigfaltigkeit ist, deren Rand aus endlich vielen zweimal stetig differenzierbaren Stücken besteht. Die zweimalige stetige Differenzierbarkeit ist um so mehr eine viel zu starke Forderung, als sie nicht einmal der Natur der Aufgabe entspringt. Sie wird hier jedoch gestellt, damit für den allgemeinen Oberflächenbegriff der zulässigen Körper eine Definition gegeben werden kann, die auf dem Umgebungsbegriff fußt.

2. Die Projektion von $\mathfrak{K}$ parallel zur x_n-Achse füllt den Ringraum (1. 1) aus.

3. $\mathfrak{K}$ besitzt auf dem Rand von (1. 1) eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit $\mathfrak{N}$, welche die Oberfläche $\mathfrak{O}$ von $\mathfrak{K}$ in zwei Teile $\mathfrak{O}_1$ bzw. $\mathfrak{O}_2$ zerlegt, und zwar so, daß der Übergang eines Punktes von $\mathfrak{O}_1$ zu einem Punkt von $\mathfrak{O}_2$ ohne Überschreiten von $\mathfrak{N}$ unmöglich ist.

Wie schon erwähnt wurde, kann diese Voraussetzung mittels der Steinerschen Symmetrisierung (und im nichteuklidischen Falle mittels einer Verallgemeinerung derselben) aufgehoben werden, so daß die einzigen wirklichen Voraussetzungen die Voraussetzungen 1 und 2 bleiben. Da jedoch die strenge Begründung der hier angedeuteten Steiner-Symmetrisierung für alle Räume konstanter Krümmung mit rechnerischen Schwierigkeiten verbunden ist, so wird die Durchführung dieser Symmetrisierung erst im zweiten Teil dieser Arbeit zusammen mit der Behandlung des Problems I entwickelt werden.

[3]) Erhard Schmidt, Über das isoperimetrische Problem im Raum von n Dimensionen. Math. Zeitschr. 44 (1939), S. 689—788.

Zum Schluß noch einige Bemerkungen über unser Problem II. Es ist leicht zu sehen, daß das Problem II (unter der Annahme der Zulässigkeitsbedingung 3) in der hier vorgebrachten verallgemeinerten Fassung sehr eng mit folgender Aufgabe (Problem III) verwandt ist:

Es sei $\mathfrak{F}$ ein $(n-1)$-dimensionales Flächenstück des n-dimensionalen Raumes, das oberhalb $x_n = 0$ liegt und durch die beiden Mannigfaltigkeiten $\sum_1^{n-1} x_\nu^2 = a^2, x_n = 0$ bzw. $\sum_1^{n-1} x_\nu^2 = b^2, x_n = 0$ geht. Es sei ferner angenommen, daß die Projektion von $\mathfrak{F}$ parallel zur x_n-Achse mit dem Ring (1. 1) zusammenfällt. Bezeichnet dann V das von $\mathfrak{F}$ und der Hyperebene $x_n = 0$ begrenzte Volumen, so wird bei gegebener Oberfläche die Form desjenigen Flächenstücks $\mathfrak{F}$ gesucht, für welches V Maximum wird.

Diese Aufgabe hat für zwei Dimensionen eine Ähnlichkeit mit einer von Darboux[4]) behandelten isoperimetrischen Aufgabe auf zweidimensionalen Flächen (ohne die Bedingung über die Projektion) und einigen isoperimetrischen Aufgaben von Bonnesen[5]) in der Ebene. Im folgenden werden wir diese Aufgabe als Problem von Darboux-Schmidt bezeichnen. Ausführlich werden wir uns jedoch in dieser Arbeit mit der eben formulierten Aufgabe nicht befassen, denn ihre Lösung ergibt sich auf Grund der hier entwickelten Methoden unmittelbar und zwar im Anschluß an die Lösung des verallgemeinerten Problems II.

Was die hier befolgte Methode betrifft, so stützt sich diese hauptsächlich auf den Gaussschen Divergenzsatz über die Transformation eines Volumenintegrals über eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit in ein Oberflächenintegral. Auf diese Weise wird die fundamentale isoperimetrische Gleichung (15. 1) gewonnen. Daß diese so einfach ausfällt, liegt an einem Zufall, der die Schmidtsche Problemstellung ins rechte Licht rückt, und wonach ein gewisses Integral, nämlich das Integral (17. 1) identisch verschwindet.

Schließlich darf hier noch bemerkt werden, daß die vorliegende Arbeit außer den Problemstellungen in keinem Zusammenhang mit der Schmidtschen Abhandlung steht. Es wird vielmehr hier angestrebt, die Ergebnisse, welche dieses spezielle Problem betreffen, selbständig, elementar und hauptsächlich ohne Bezugnahme auf allgemeine Theorien zu begründen.

---

[4]) G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces. Paris 1894, Bd. 3 S. 148.

[5]) T. Bonnesen, Quelques problèmes isopérimétriques. Acta math. 48 (1926) S. 123—178.

Kapitel I.

Die drei Klassen der Extremalen der Schmidtschen Aufgabe.

Vorbereitende Tatsachen. Problemstellung.

3. Bevor wir zur Formulierung der Schmidtschen Aufgabe schreiten, wollen wir die hier benutzten Bezeichnungen erklären. In der ganzen Arbeit soll $\varphi(x, K)$ [kurz $\varphi(x)$], die Funktion $\cos\sqrt{K}\,x$ bedeuten, wobei x als Veränderliche und K als Parameter zu betrachten sind. Für $K = 0$ wird $\varphi(x)$ durch Stetigkeit definiert, es wird also

$$\varphi(x, 0) = \varphi(x) = \lim_{K \to 0} \cos\sqrt{K}\,x = 1$$

gesetzt. Außer $\varphi(x)$ führen wir noch die Funktionen $\psi(x)$ bzw. $\omega(x)$ ein, und zwar durch

$$\psi(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt = \frac{\sin\sqrt{K}\,x}{\sqrt{K}}$$

und

$$\omega(x) = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{\operatorname{tg}\sqrt{K}\,x}{\sqrt{K}}.$$

Offenbar ist:

$$\psi' = \varphi, \quad \varphi' = -K\psi, \quad \varphi^2 + K\psi^2 = 1$$

und

$$\psi^2 = \frac{\omega^2}{1 + K\omega^2}, \qquad \varphi^2 = \frac{1}{1 + K\omega^2}.$$

Zur Beschreibung der n-dimensionalen nichteuklidischen Räume benutzen wir die homogenen Koordinaten von Weierstrass, wie wir dies in den beiden früheren Arbeiten getan haben[6]). Wir stellen hier die wichtigsten Tatsachen zusammen.

Wir behandeln zuerst den sphärischen n-dimensionalen Raum. Ein Punkt desselben wird (unter Zugrundelegung eines rechtwinkligen Koordinatensystems) durch die Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ dargestellt mit

$$\sum_1^{n+1} x_\nu^2 = \frac{1}{K} \quad (K > 0). \tag{3. 1}$$

Das Bogenelement wird dann durch die Formel

$$ds^2 = \sum_1^{n+1} dx_\nu^2$$

gegeben. Ein solcher Raum wie (3. 1) wird von der Krümmung K genannt.

---

[6]) Vgl. dazu: A. Dinghas, Zum isoperimetrischen Problem in Riemannschen Räumen konstanter Krümmung. Math. Zeitschr. **47** (1942), S. 677—737, oder das richtige Buch von E. Cartan, Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, Paris 1928.

Die drei weiteren Räume können jetzt mittels projektiver Betrachtungen definiert werden.

Ein Punkt P eines elliptischen, euklidischen oder hyperbolischen Raumes wird durch $n+1$ projektive oder WEIERSTRASS sche Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ definiert, welche der Bedingung

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + \frac{x_{n+1}^2}{K} = \frac{1}{K} \tag{3. 2}$$

unterworfen sind. $K > 0$ entspricht hier dem elliptischen und $K < 0$ dem hyperbolischen Raum. Der euklidische Fall wird als Grenzfall $(K \to 0)$ betrachtet. Das Bogenelement des Raumes (3. 2) wird durch

$$ds^2 = \sum_1^n dx_\nu^2 + \frac{1}{K} dx_{n+1}^2 \tag{3. 3}$$

gegeben, und dieses geht für $K \to 0$ (wegen $x_{n+1} \to 1$) in das Bogenelement des n-dimensionalen euklidischen Raumes

$$ds^2 = \sum_1^n dx_\nu^2 \tag{3. 4}$$

über.

Ist $K \neq 0$, so kann man an Stelle der x_i die Koordinaten

$$X_i = \frac{x_i}{x_{n+1}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3. 5}$$

benutzen[7]). Man erhält dann durch elementare Rechnungen an Stelle von (3. 3) das Bogenelement

$$ds^2 = \frac{(1 + K \sum_1^n X_i^2)\sum_1^n dX_i^2 + K(\sum_1^n X_i dX_i)^2}{(1 + K \sum X_i^2)^2}, \tag{3. 6}$$

das dem bekannten CAYLEY-KLEIN schen Schema der nichteuklidischen Geometrien entspricht.

Wir wollen jetzt in (3. 1) bzw. (3. 2) Polarkoordinaten einführen. Dazu geben wir (3. 1) durch die Substitution $\sqrt{K}\, x_{n+1} = x'_{n+1}$ die Form (3. 2) und schreiben dann x_{n+1} an Stelle von x'_{n+1}. Diese Verabredung soll für den sphärischen Raum immer gelten. Die Gleichung (3. 2) kann dann befriedigt werden, wenn man setzt:

$$\begin{aligned} x_i &= \{ \prod_{\nu=1}^{\nu=i-1} \varphi(\vartheta_\nu) \}\, \psi(\vartheta_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \\ x_{n+1} &= \prod_1^n \varphi(\vartheta_\nu)\,^8). \end{aligned} \tag{3. 7}$$

[7]) Für $K = 0$ artet diese Transformation in die identische Transformation aus.

[8]) Für $i = 1$ ist das Produkt leer, also $x_1 = \psi(\vartheta_1)$.

Dabei variieren die ϑ_i im euklidischen bzw. hyperbolischen Fall von $-\infty$ bis $+\infty$ und im elliptischen zwischen $-\frac{\pi}{2\sqrt{K}}$ und $\frac{\pi}{2\sqrt{K}}$. Im sphärischen Fall ändert sich nur das Variationsintervall von ϑ_n, und zwar wird dieses das Intervall von $-\frac{\pi}{\sqrt{K}}$ bis $\frac{\pi}{\sqrt{K}}$.

Rechnet man das Bogenelement ds^2 in die Koordinaten ϑ_i um, so findet man

$$ds^2 = d\vartheta_1^2 + \varphi^2(\vartheta_1)\, d\vartheta_2^2 + \cdots + \varphi^2(\vartheta_1) \ldots \varphi^2(\vartheta_{n-1})\, d\vartheta_n^2. \tag{3.8}$$

Dieser Ausdruck geht für $K \to 0$ in die euklidische Fundamentalform

$$ds^2 = d\vartheta_1^2 + \cdots + d\vartheta_n^2 \tag{3.9}$$

über.

4. Unter Fundamentalbereich verstehen wir im folgenden:

1. Für $K \leqq 0$ den Bereich

$$-\infty < \vartheta_i < \infty \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.1}$$

2. Für $K > 0$ (elliptischer Raum) den Bereich

$$-\frac{\pi}{2\sqrt{K}} \leqq \vartheta_i < \frac{\pi}{2\sqrt{K}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.2}$$

und

3. für den sphärischen Raum von der Krümmung K den Bereich

$$-\frac{\pi}{2\sqrt{K}} \leqq \vartheta_i < \frac{\pi}{2\sqrt{K}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad -\frac{\pi}{\sqrt{K}} \leqq \vartheta_n < \frac{\pi}{\sqrt{K}}\,^{9}). \tag{4.3}$$

Diesen Fundamentalbereich bezeichnen wir im folgenden mit G_0. Wir gehen jetzt zur einheitlichen Formulierung der Schmidtschen Aufgabe für alle nichteuklidischen Räume konstanter Krümmung über und zwar unter Verwendung der homogenen Koordinaten x_i, der Cayley-Kleinschen Koordinaten X_i und schließlich der Koordinaten ϑ_i. Wir erhalten dann folgende drei gleichwertige Formulierungen:

I. Es bezeichne im x-Raum $\mathfrak{H}_{a\,b}$ die Menge aller Punkte, welche den Ungleichungen

$$\psi^2(a) \leqq x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leqq \psi^2(b) \tag{4.4}$$

genügen. Es soll unter allen zulässigen Körpern $\mathfrak{K}$, die in $\mathfrak{H}_{a\,b}$ einbeschrieben sind, derjenige bestimmt werden, der unter vorgegebener Oberfläche O das Maximum

---

[9]) Eigentlich handelt es sich hier um die Darstellung der in den Punkten $x_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{K}}$, $x_2 = \cdots = x_n = x'_{n+1} = 0$ punktierten Kugel (3.1). Es darf hier darauf hingewiesen werden, daß man aus dem sphärischen Raum den elliptischen Raum ableiten kann, indem man die Punkte $P(x_1, \ldots, x_{n+1})$ und $P'(-x_1, -x_2, \ldots, -x_{n+1})$ identifiziert.

des Volumens aufweist. Die Definition des zulässigen und in $\mathfrak{H}_{a\,b}$ einbeschriebenen Körpers wird später ausführlich dargelegt werden.

II. Unter allen zulässigen Körpern $\mathfrak{K}$, *welche im ringförmigen Raum*

$$\begin{aligned} X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{n-1}^2 - K\,\omega^2(b)\,X_n^2 &\leqq \omega^2(b) \\ X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{n-1}^2 - K\,\omega^2(a)\,X_n^2 &\geqq \omega^2(a) \end{aligned} \tag{4.5}$$

liegen, soll derjenige bestimmt werden, der unter gegebener Oberfläche O *das Maximum des Volumens* V *aufweist.*

III. Es bezeichne $\mathfrak{H}_{a\,b}$ *den im Fundamentalbereich* G_0 *der Mannigfaltigkeit liegenden „Zylinder"*

$$\frac{\varphi(b)}{K} \leqq \frac{\prod_1^{n-1} \varphi(\vartheta_\nu)}{K} \leqq \frac{\varphi(a)}{K}\ ^{10}). \tag{4.6}$$

Es soll unter allen in $\mathfrak{H}_{a\,b}$ *einbeschriebenen zulässigen Körpern* $\mathfrak{K}$ *derjenige bestimmt werden, der unter vorgegebener Oberfläche das Maximum des Volumens aufweist.*

Jeder dieser drei gleichwertigen Formulierungen liegt die entsprechende Metrik (3.3), (3.6) und (3.8) zugrunde. Ferner muß die Zahl b für $K > 0$ der Ungleichung

$$b < \frac{\pi}{2\sqrt{K}}$$

genügen.

Es zeigt sich, daß die dritte Formulierung am einfachsten zu behandeln ist. Wir werden deswegen diese unseren Betrachtungen zugrunde legen. Ist einmal die Aufgabe in diesen Koordinaten gelöst, so ist, um die Aufgabe in den Koordinaten x_i bzw. X_i zu erhalten, nur eine einfache Koordinatentransformation erforderlich.

Formulierung des Schmidtschen Hauptsatzes.

5. Wie Erhard Schmidt in seiner vorhin erwähnten Abhandlung für den dreidimensionalen Fall gezeigt hat, gibt es bei festem a und b und vorgegebenem O drei Arten von geschlossenen Extremalflächen. Diejenigen nämlich, welche durch Rotation der Extremalen eines eindimensionalen Problems entstehen, und die er als Extremale vom Typus (A), (B, 1) und (B, 3)

[10]) Für $K \to 0$ folgt, wenn man den Grenzübergang ausführt,

$$a^2 \leqq \vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + \cdots + \vartheta_{n-1}^2 \leqq b^2,$$

was einem gewöhnlichen Zylinderraum entspricht.

ezeichnet hat[11]). Wir sprechen hier von den Typen I, II und III und charakerisieren sie folgendermaßen: Alle drei Arten der Extremalflächen sind für $n > 2$) Rotationsflächen und werden durch eine (später genauer zu erlärende) nichteuklidische Rotation einer gewöhnlichen Kurve C erhalten.

Um C darzustellen, bedienen wir uns der Metrik

5. 1) $$ds^2 = du^2 + \varphi^2(u)\, dv^2.$$

s sei dann G_0 der dieser Metrik zugehörige Fundamentalbereich. Dieser kann für $K > 0$ (elliptischer all) durch das Quadrat $ABB'A'$ dargestellt werden.

Der in ihm gezeichnete Streifen G_{ab} ist wegen er bekannten Bewegungszusammenhänge doppelt nd spiegelbildlich gezeichnet worden.

Bewegt man sich in der uv-Ebene in einer ichtung parallel zur v-Achse von G_0, so ist es öglich, von dem rechten Streifen in den linken nd umgekehrt, einzudringen. Beim sphärischen all handelt es sich nur um den rechten Streifen, er von dem linken getrennt zu behandeln ist, da an durch fortgesetzte Bewegung längs der v-Richung immer in demselben Streifen bleibt[12]).

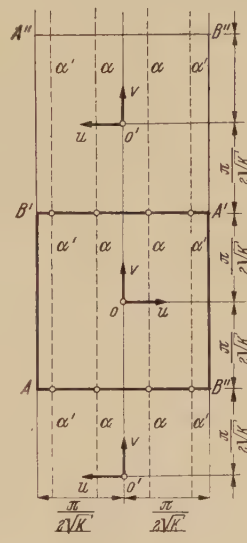


Fig. 1.

Der Einfachheit wegen nehmen wir in beiden ällen (elliptischer und sphärischer Fall) an, daß ie Vergleichskurven in dem rechten Streifen von G_0 liegen. Wie wir zeigen erden, gibt es immer geschlossene Extremalen, die in diesem Streifen liegen.

Nach diesen Vorbereitungen behaupten wir:

1. *Es gibt drei reelle Kurvenscharen I, II, III oder Klassen, die so beschaffen nd, daß jede Schar mit einer Kurve auch die Spiegelkurve derselben an der -Achse enthält. Kurven von der Klasse I bzw. II oder III bezeichnen wir im lgenden mit C_I bzw. C_{II} bzw. C_{III}.*

2. *Die Kurven C_I, C_{II}, C_{III} der Scharen I, II, III genügen einer Differentialeichung von der Form*

5. 2) $$\frac{dv}{du} \pm \frac{k_g \Phi(u)}{\varphi \sqrt{1 - k_g^2 \Phi^2(u)}} = 0$$

[11]) Explizit wurden diese Extremalen für die vorliegende Aufgabe nur für den reidimensionalen euklidischen bzw. hyperbolischen Fall berechnet. Jedoch folgt auch er sphärische Fall aus den allgemeinen Sätzen (bei festen a, b) unmittelbar. Einige chwierigkeiten dürfte dabei nur die Frage der schlichten Überdeckung bereiten.

[12]) Für den sphärischen Fall wird hier keine Zeichnung angegeben. Es genügt e Bemerkung, daß der Fundamentalbereich G_0 der Bereich $ABB''A''$ ist und daß e verschiedenen Koordinatensysteme in den Nebenbereichen gleichgerichtet sind.

mit

$$(5.\,3)\qquad \Phi(u) = \frac{\varphi^{n-1}(u) + A}{\varphi\,\varphi^{n-2}(u)} = \omega(u) + \frac{A\,\omega(u)}{\varphi^{n-1}(u)} = \omega(u) + AG(u).$$

Dabei ist A ebenso wie k_g Parameter. Diese werden allein durch die Oberfläche C bestimmt[13]).

3. Die Kurven C_{I}, C_{II}, C_{III} der drei Klassen I, II, III werden ferner durch folgende Eigenschaften charakterisiert:

a) *Für die Kurven C_I ist*

$$k_g = k_{\gamma\bar{\gamma}} = \frac{G(b)\cos\bar{\gamma} + G(a)\cos\gamma}{G(a)\,\omega(b) - G(b)\,\omega(a)}, \qquad A = -\frac{\omega(a)\cos\bar{\gamma} + \omega(b)\cos\gamma}{G(a)\cos\bar{\gamma} + G(b)\cos\gamma}.$$

Dabei variiert γ im Intervall

$$\gamma_0 \leqq \gamma < \frac{\pi}{2}$$

und $\bar{\gamma}$ wird jedesmal durch γ so bestimmt, daß das Integral

$$J_{\gamma\bar{\gamma}} = \int_a^b \frac{Q_{\gamma\bar{\gamma}}\,du}{\varphi\sqrt{M^2 - Q_{\gamma\bar{\gamma}}^2}} = 0$$

verschwindet. Hierin ist

$$Q_{\gamma\bar{\gamma}} = \{G(a)\cos\gamma + G(b)\cos\bar{\gamma}\}\,\omega(u) - \{\omega(a)\cos\gamma + \omega(b)\cos\bar{\gamma}\}G(u)$$

und

$$M = G(a)\,\omega(b) - G(b)\,\omega(a).$$

Jede Kurve C_{I} kann durch Parallelverschiebung in eine Lage gebracht werden, daß sie durch die Punkte $P_1(u = a, v = 0)$ und $P_2(u = b, v = 0)$ geht. Wie wir später sehen werden, bedeuten γ, $\bar{\gamma}$ die Winkel, welche die Normale in P_1 bzw. P_2 mit der u-Achse bildet. Deswegen benutzen wir an Stelle von C_{I} auch die Bezeichnung $C_{\gamma\bar{\gamma}}$. Die Kurven C_{I} (oder $C_{\gamma\bar{\gamma}}$) berühren die beiden Geraden $u = a$, $u = b$ nicht.

b) *Für die Kurven C_{II} ist:*

$$k_g = k_\gamma = \frac{G(a)\cos\gamma + G(b)}{G(a)\,\omega(b) - G(b)\,\omega(a)}, \qquad A = -\frac{\omega(a) + \omega(b)\cos\gamma}{G(a) + G(b)\cos\gamma}.$$

Dabei variiert γ im Intervall

$$0 < \gamma < \gamma_0.$$

---

[13]) Die Differentialgleichungen (5. 2) sind nichts anderes als die einmal integrierten Eulerschen Differentialgleichungen des Problems. Diese werden nicht abgeleitet werden. Was hier geleistet wird, ist die Konstruktion des Feldes. Dieser Sachverhalt wird später ausführlicher dargestellt werden.

Die Kurven C_{II} können durch Parallelverschiebung (eventuell nach Spiegelung an der v-Achse) in eine Lage gebracht werden, daß sie durch P_2 gehen und die Gerade $u = a$ in einem Punkt $P_a(0, v_a)$ mit $v_a > 0$ berühren. Für alle v der Punkte $P(u, v)$ von C_{II} gilt dann $v \geqq 0$.

Wie später bewiesen werden soll, liegen alle Kurven dieser Klasse, die durch P_2 gehen, in G_0. Hier ist γ der Winkel, den die Normale in P_2 mit der u-Achse bildet. Wir schreiben deswegen später C_γ an Stelle von C_{II}.

c) *Für die Kurven C_{III} der Schar III ist schließlich*

(5. 4) $$k_g = \frac{G(a) + G(b)}{G(a)\,\omega(b) - G(b)\,\omega(a)}, \quad A = -\frac{\omega(a) + \omega(b)}{G(a) + G(b)}.$$

Diese Kurven berühren beide Geraden $u = a$, $u = b$ und liegen für $K > 0$, falls die Berührung nicht viel oberhalb (bzw. für die Spiegelkurve nicht viel unterhalb) der Punkte $P(a, v_a)$, $P_2(b, 0)$ [bzw. $P'(a, -v_a)$, $P_2(b, 0)$] stattfindet, innerhalb des Fundamentalbereiches G_0.

6. Mit Hilfe dieser Scharen konstruieren wir drei entsprechende Klassen von Extremalflächen bzw. Körpern, und zwar so: Wir betrachten zuerst eine Kurve C_{I}, welche durch P_1, P_2 geht. Durch Spiegelung an der u-Achse entsteht eine linsenförmige Figur $C_{\gamma,\bar{\gamma}}$. Durch eine nichteuklidische Rotation von $C_{\gamma,\bar{\gamma}}$ um die v-Achse entstehen die Ringkörper $\mathfrak{K}_{\gamma,\bar{\gamma}}$, die wir als Repräsentanten der Extremalkörper der Klasse I betrachten. Alle Körper, die aus ihnen durch Parallelverschiebung längs der v-Achse entstehen, werden, solange sie in G_0 liegen, ebenfalls als Extremalkörper von der Klasse I bezeichnet werden.

Ähnlich konstruiert man die Klasse $\mathfrak{K}_\gamma$ durch Rotation von Extremalen C_γ, und schließlich die Klasse der Extremalkörper $\mathfrak{K}_q$ durch Rotation zweier in bezug auf $v = 0$ symmetrisch liegender Extremalkurven C_{III}. Dabei bedeutet q die Größe $2\,v_b$, wenn v_b die Ordinate des Berührungspunktes der oberen Hälfte von C_{III} mit der Geraden $u = b$ ist. Daß für $K > 0$ q nicht beliebig groß genommen werden kann, ist wegen der Beschränktheit von G_0 einleuchtend.

Sind einmal die drei Extremalklassen $\mathfrak{K}_{\gamma,\bar{\gamma}}$, $\mathfrak{K}_\gamma$, $\mathfrak{K}_q$ definiert, so können wir das Hauptresultat dieser Arbeit folgendermaßen formulieren:

Unter allen im Ringraum

(3. 1) $$\frac{\varphi(a)}{K} \leqq \frac{\prod_1^{n-1} \varphi(\vartheta_i)}{K} \leqq \frac{\varphi(b)}{K}$$

einbeschriebenen zulässigen Körpern erreichen bei vorgegebenem O nur die Körper der Klassen I, II, III das Maximum des Volumens. Und zwar ist für

$$O_0 < O < O_1$$

die Lösung ein Körper der Klasse I, für

$$O_1 \leqq O < O_2$$

ein Körper der Klasse II, und für

$$O_2 \leqq O$$

ein Körper der Klasse III. Dabei wird jedesmal der Extremalkörper eindeutig durch O bestimmt.

Die Grenzen O_0, O_1, O_2 werden später explizit angegeben und ihre Existenz ausführlicher bewiesen. Hier sei nur folgendes gesagt: *Es ist*

$$O = 2(n-1) W_{n-1} \int_a^b \psi^{n-2} dx,$$

$$O_1 = 2(n-1) W_{n-1} M \int_a^b \frac{\psi^{n-2} dx}{\sqrt{M^2 - Q_{\gamma_0}^2}}$$

und

$$O_2 = 2(n-1) W_{n-1} \int_a^b \frac{\psi^{n-2}(x)\,\varphi(x)\,M + \psi^{n-2}(a)\,\varphi(a)\,Q_0}{\sqrt{M^2 - Q_0^2}} dx.$$

Wie schon früher erklärt wurde, ist hier

$$M = G(a)\,\omega(b) - G(b)\,\omega(a),$$

$$Q_0(x) = \{G(a) + G(b)\}\,\omega(x) - \{\omega(a) + \omega(b)\}\,G(x),$$

$$Q_{\gamma_0}(x) = \{G(a)\cos\gamma_0 + G(b)\}\,\omega(x) - \{\omega(a)\cos\gamma_0 + \omega(b)\}\,G(x),$$

und γ_0 wird eindeutig bestimmt durch die einzige Nullstelle des Integrals

$$J(\gamma) = \int_a^b \frac{Q_\gamma\, dx}{\varphi \sqrt{M^2 - Q_\gamma^2}} = 0 \quad \left(0 < \gamma < \frac{\pi}{2}\right).$$

Dabei ist

$$Q_\gamma(x) = \{G(a)\cos\gamma + G(b)\}\,\omega(x) - \{\omega(a)\cos\gamma + \omega(b)\}\,G(x).$$

Ferner bedeutet W_{n-1} den Inhalt der $(n-1)$-dimensionalen Kugel.

Der Gedankengang des Beweises wird nun kurz folgender sein: Unter Zugrundelegung der Differentialgleichung (5. 2) der „Extremalen" wird zuerst gezeigt, daß es möglich ist, „Extremalen" von der Klasse I, II und III zu konstruieren. Sodann wird durch die fundamentale Gleichung (15. 1) nachgewiesen, daß die durch die „Extremalen" dieser Klasse bestimmten Körper ein kleineres Volumen besitzen als jeder andere Körper mit demselben O. Die Eindeutigkeit der Bestimmung der Körper der drei Klassen ausschließlich durch ihre Oberfläche wird zum Schluß durch Monotoniebetrachtungen erbracht werden.

Kapitel II.

Existenz und Konstruktion der Extremalen.

Konstruktion der „Extremalen" C_{I}, C_{II} und C_{III}.

7. Wir beginnen zuerst mit der Konstruktion der Extremalen der Klasse III und zeigen folgende Tatsache: Es existiert eine „Extremale" [d. h. eine Kurve, welche der Differentialgleichung (5. 2) genügt], welche die Gerade $u = b$ in $v = 0$ und die Gerade $u = a$ in einem Punkt $P(a, v_a)$ berührt.

Zuerst behaupten wir: Für $n = 2$ ist $v_a = 0$ und für $n > 2$, $v_a > 0$.

Zum Beweis dieser Tatsache bestimmen wir k_g, A in (5. 2) so, daß diese „Extremale" die Geraden $u = a$, $u = b$ berührt. Dafür bestimmen wir zuerst aus (5. 2) die Richtungskosinus der „Normalen" einer „Extremalen" in einem ihrer Punkte, wobei diese Normale so definiert ist, daß sie sich zu der nach vorschreitendem s (s ist die Bogenlänge der betreffenden Extremalen, gemessen z. B. von ihrem Berührungspunkt mit der Geraden $u = b$) gerichteten Tangente so verhält, wie die positive u-Richtung zu der positiven v-Richtung.

Eine leichte Überlegung zeigt dann, daß die Richtungskosinus $\cos(\bar{n}, u)$, $\cos(\bar{n}, v)$ dieser Normalen mit der u- bzw. v-Richtung durch die Formeln

$$\cos(\bar{n}, u) = \varphi \frac{dv}{ds} = k_g \Phi, \qquad \cos(\bar{n}, v) = -\frac{du}{ds} = \sqrt{1 - k_g^2 \Phi^2} \tag{7.1}$$

gegeben werden.

Verlangen wir nun für $u = b$ $\cos(\bar{n}, u) = 1$ und für $u = a$ $\cos(\bar{n}, u) = -1$, so folgt daraus mit Rücksicht auf (5. 3)

$$k_g\{\omega(a) + AG(a)\} = -1, \quad k_g\{\omega(b) + A_g G(b)\} = +1.$$

Löst man dieses System nach k_g, A_g auf, so findet man für diese die Werte (5. 4).

Mit diesen Werten von k_g bzw. A_g folgt, wie man unmittelbar nachprüft,

$$k_g \Phi = \frac{\{G(a) + G(b)\}\,\omega(u) - \{\omega(a) + \omega(b)\}\,G(u)}{G(a)\,\omega(b) - G(b)\,\omega(a)} = \frac{Q(u)}{Q(b)} = \frac{Q(u)}{M}.$$

Für diese „Extremale" muß

$$\varphi \frac{dv}{du} = -\frac{Q(u)}{\sqrt{M^2 - Q^2}} \tag{7.2}$$

gelten, und es folgt durch Integration (wegen $v_b = 0$)

$$v_a = \int_a^b \frac{Q(u)\,du}{\varphi \sqrt{M^2 - Q^2}}. \tag{7.3}$$

Es soll nun bewiesen werden: *Für $n = 2$ ist $v_a = 0$.* Bevor wir zum Beweis dieser Tatsache schreiten, muß nachgewiesen werden, daß der Ausdruck

unter dem Radikal in (7. 2) oder (7. 3) nicht negativ wird. Dazu genügt, wegen $M = Q(b) = -Q(a)$ zu zeigen, daß $Q(u)$ eine *monoton wachsende* Funktion von u ist. Ist $K \leqq 0$, so ist diese Tatsache einfach zu beweisen, wenn man die Ableitung Q' bildet. In der Tat folgt aus der Definition von Q

$$Q' = A\,\omega' - BG' = A\,\omega' + B\,\frac{(n-1)\,G - G\,\omega'}{\omega},$$

denn es gilt

$$\left(\frac{\omega}{G}\right)' = (n-1)\,\psi^{n-2}\,\varphi = (n-1)\,\frac{1}{G}.$$

Es wird also nach vorheriger Multiplikation mit

$$\omega\,Q' = \omega' Q + B\,G + (n-2)\,B\,G,$$

d. h.

$$\omega Q' = \frac{A\,\omega}{\varphi^2} + BG\left(1 - \frac{1}{\varphi^2}\right) + (n-2)\,BG,$$

oder

$$\omega Q' = \frac{A\,\omega}{\varphi^2} - K\,BG\omega^2 + (n-2)\,BG, \tag{7.4}$$

woraus wegen $K \leqq 0$ die Behauptung folgt.

8. Ist $K > 0$, so kann man ohne weiteres $K = 1$ voraussetzen, da sich ja sonst alles mit einer Potenz von K multipliziert. Nun ist allgemein:

$$Q' = \frac{A}{\varphi^2} - B\,G\omega + (n-2)\,\frac{B}{\psi^{n-1}} \tag{8.1}$$

mit

$$A = G(a) + G(b),\ B = \omega\,(a) + \omega\,(b),\ G = \frac{\omega}{\psi^{n-1}}.$$

Wegen $K = 1$ bedeuten hier die Funktionen ψ, φ, ω die gewöhnlichen trigonometrischen Funktionen $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$. Da offenbar $A > B$ ist, so ist

$$Q' > B\left\{\frac{1}{\varphi^2} - \frac{\psi^2}{\varphi^2\,\psi^{n-1}} + (n-2)\,\frac{1}{\psi^{n-1}}\right\}$$

oder

$$Q' > \frac{B}{\varphi^2\,\psi^{n-1}}\left\{\psi^{n-1} - (n-1)\,\psi^2 + (n-2)\right\}.$$

Nun wird behauptet: *Das Polynom*

$$P(x) = x^{n-1} - (n-1)\,x^2 + (n-2)$$

ist für $0 < x < 1$ *positiv, und zwar gilt für* $n > 2$

$$P(x) > (n-2)\,(1-x) > 0 \tag{8.2}$$

und für $n = 2$

$$P(x) = x\,(1-x) > 0. \tag{8.3}$$

Da die zweite Behauptung unmittelbar aus der Definition von $P(x)$ folgt, so beweisen wir (8. 2).

Da das Polynom $P(x)$ durch $1 - x$ teilbar ist und

(8. 4) $$P(x) = (1 - x)\{(n - 2)(1 + x) - x^2 - x^3 - \cdots - x^{n-2}\},$$

so ist wegen $0 < x < 1$ in der Tat

(8. 5) $$P(x) > (1 - x)\{(n - 2)(1 + x) - (n - 2)x\} = (1 - x)(n - 2) > 0.$$

Somit ist die Behauptung (8. 2) bewiesen und hiermit zugleich auch die Ungleichung $Q' > 0$. Was die Realität von $\sqrt{M^2 - Q^2}$ anbetrifft, so ist sie eine Folgerung dieser Tatsache, da ja $|Q|$ sein Maximum für $u = a$ bzw. $u = b$ annimmt. Da dort $|Q(a)| = |Q(b)| = M$ ist, so ist in $a < u < b$, $|Q(u)| < M$ und somit $M^2 - Q^2(u) > 0$.

Es bleibt jetzt nur der Satz $v_a \geqq 0$ zu beweisen.

Beweis von $v_a \geqq 0$.

9. Der Beweis von $v_a \geqq 0$ ist schwierig. Man kann ihn in zwei Teile zergegen, und zwar für den Fall $n = 2$ und dann für den Fall $n > 2$.

Die Behauptung für $n = 2$ lautet: *Für $n = 2$ gilt*

(9. 1) $$J = \int_a^b \frac{Q\,du}{\varphi\sqrt{M^2 - Q^2}} = 0.$$

Diese Behauptung ist wegen des Auftretens von φ nicht trivial. Zum Beweis von (9. 1) führen wir eine neue Veränderliche x durch die Gleichung

(9. 2) $$x = \int_a^u \frac{dt}{\varphi(t)}$$

ein und setzen

$$Q(u) = F(x) = y, \quad \varrho = \int_a^b \frac{dt}{\varphi(t)}.$$

Es wird dann wegen

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dQ}{du}\varphi(u) = Q' \cdot \varphi(u)$$

und

$$Q = A\omega - \frac{B}{\varphi(u)},$$

$$F' = \frac{A}{\varphi} - KB\omega.$$

Durch nochmalige Differentiation folgt:

$$F'' = (Q'\varphi)'\varphi = KA\omega - \frac{BK}{\varphi} = KF.$$

Danach genügt die Funktion $F(x)$ der Differentialgleichung

$$y'' - Ky = 0. \tag{9.3}$$

Bezeichnen wir mit $\bar{\psi}$, $\bar{\varphi}$ die mit $-K$ an Stelle von K gebildeten Funktionen $\psi(x, K)$, $\varphi(x, K)$ [14]), so ist die allgemeine Lösung von (9. 9)

$$F(x) = C_1 \bar{\psi}(x) + C_2 \bar{\varphi}(x), \tag{9.4}$$

wobei C_1, C_2 willkürliche Konstanten sind. Verlangt man

$$F(0) = Q(a) = -Q(b), \quad F(\varrho) = Q(b),$$

so erhält man nach einigen einfachen Rechnungen die definitive Form für $F(x)$,

$$F(x) = \frac{Q(b)}{\psi(\varrho)} \{\bar{\psi}(x) - \bar{\psi}(\varrho - x)\}. \tag{9.5}$$

Aus dieser Gleichung folgt nun, daß $F(x)$ eine in bezug auf $x = \frac{\varrho}{2}$ symmetrische Funktion ist, die für $x = \frac{\varrho}{2}$ verschwindet. Sie ist für $x < \frac{\varrho}{2}$ negativ, für $x > \frac{\varrho}{2}$ positiv und nach dem Vorhergesagten monoton wachsend. Für $K \to 0$ wird $F(x)$ gleich

$$F(x) = 2x - (b - a).$$

Führt man in

$$J = \int_a^b \frac{Q(u)\, du}{\varphi(u) \sqrt{M^2 - Q^2(u)}}$$

die Veränderliche x ein, so wird

$$J = \int_0^{\varrho} \frac{F(x)\, dx}{\sqrt{M^2 - F^2(x)}} = 0. \tag{9.6}$$

10. Um $v_a > 0$ für $n > 2$ zu beweisen, verfahren wir folgendermaßen: Es sei $u = u_0$ ein solcher Wert, daß

$$\frac{\varrho}{2} = \int_a^{u_0} \frac{dt}{\varphi(t)}$$

gilt. Dann behaupten wir:

Wird, damit die Abhängigkeit von n besonders hervortritt, $Q_n(u) = A_{n-1}\omega - B G_{n-1}$ *gesetzt, mit*

$$A_{n-1} = \frac{\omega(a)}{\psi^{n-1}(a)} + \frac{\omega(b)}{\psi^{n-1}(b)}, \quad G_{n-1} = \frac{\omega(u)}{\psi^{n-1}(u)},$$

[14]) Also $\bar{\psi}(x) = \psi(x, -K)$, $\bar{\varphi}(x) = \varphi(x, -K)$.

gilt für die Nullstelle q_n von Q_n die Ungleichung

10. 1) $$q_n < u_0$$

ir jedes $n > 2$.

Nach Definition ist

$$\psi(u_0) = \frac{B}{A_1}$$

nd

$$\psi^{n-1}(q_n) = \frac{B}{A_{n-1}}.$$

Kann nun die Ungleichung

10. 2) $$\frac{B}{A_{n-1}} < \left(\frac{B}{A_1}\right)^{n-1}$$

ewiesen werden, so würde daraus

$$\psi^{n-1}(q_n) < \psi^{n-1}(u_0),$$

. h. (10. 1) folgen.

Um (10. 2) zu beweisen, setzen wir der Kürze wegen

$$A_{n-1} = \frac{a}{A^{n-1}} + \frac{b}{B^{n-1}}, \quad A = \psi(a), \quad B = \psi(b), \quad \omega(a) = a, \quad \omega(b) = b$$

it $a, b, A, B > 0$.

Es muß dann

10. 3) $$\left(\frac{a}{A} + \frac{b}{B}\right)^{n-1} < \left(\frac{a}{A^{n-1}} + \frac{b}{B^{n-1}}\right)(a+b)^{n-2}$$

ewiesen werden.

Entwickeln wir hier nach dem binomischen Lehrsatz die rechte Seite on (10. 3), so wird[15]):

10. 4) $$\left(\frac{a}{A^{n-1}} + \frac{b}{B^{n-1}}\right)(a+b)^{n-2} = \sum_0^{n-2}\left\{\binom{n-2}{\nu}\frac{a^{n-\nu-1}b^{\nu}}{A^{n-1}} + \binom{n-2}{\nu}\frac{a^{n-\nu-2}b^{\nu+1}}{B^{n-1}}\right\},$$

der

$$\left(\frac{a}{A^{n-1}} + \frac{b}{B^{n-1}}\right)(a+b)^{n-2} = \sum_0^{n-1}\left\{\binom{n-2}{\nu}\frac{1}{A^{n-1}} + \binom{n-2}{\nu-1}\frac{1}{B^{n-1}}\right\}a^{n-\nu-1}b^{\nu}.$$

---

[15]) Es wird $\binom{n-2}{n-1} = \binom{n-2}{-1} = 0$ gesetzt. Durch diese Verabredung wird in 0. 4) die Gleichung $\binom{n-2}{\nu} + \binom{n-2}{\nu-1} = \binom{n-1}{\nu}$ auch für $\nu = 0$ bzw. $\nu = n-2$ ewährleistet.

Nun ist nach dem Satz, daß das arithmetische Mittel größer oder gleich dem geometrischen ist,

$$(10.5)\quad \left\{\binom{n-2}{\nu}\frac{1}{A^{n-1}}+\binom{n-2}{\nu-1}\frac{1}{B^{n-1}}\right\}\geqq$$
$$\geqq \binom{n-1}{\nu}\left(\frac{1}{A^{n-1}}\right)^{\binom{n-2}{\nu}:\binom{n-1}{\nu}}\cdot\left(\frac{1}{B^{n-1}}\right)^{\binom{n-2}{\nu-1}:\binom{n-1}{\nu}}$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung ist wegen

$$\binom{n-2}{\nu}:\binom{n-1}{\nu}=\frac{n-\nu-1}{n-1},\quad \binom{n-2}{\nu-1}:\binom{n-1}{\nu}=\frac{\nu}{n-1},$$

gleich

$$\binom{n-1}{\nu}\frac{1}{A^{n-\nu-1}B^{\nu}}.$$

Hiermit wird

$$\left(\frac{a}{A^{n-1}}+\frac{b}{B^{n-1}}\right)(a+b)^{n-2}\geqq\sum_{0}^{n-1}\binom{n-1}{\nu}\left(\frac{a}{A}\right)^{n-\nu-1}\left(\frac{b}{B}\right)^{\nu},$$

d. h.

$$\left(\frac{a}{A^{n-1}}+\frac{b}{B^{n-1}}\right)(a+b)^{n-2}\geqq\left(\frac{a}{A}+\frac{b}{B}\right)^{n-1}.$$

Die Ungleichung ist also bewiesen und zugleich auch die Behauptung $q_n<u_0$. Da in (10. 5) das Gleichheitszeichen lediglich für $A=B$ eintreten kann, so kann hier für $n>2$ nur das Ungleichheitszeichen eintreten.

11. Zum vollständigen Beweis von $v_a>0$ bleibt noch folgende entscheidende Eigenschaft der Funktion $F_n(x)$ zu beweisen: *Es sei $y(x)$ diejenige Lösung der Differentialgleichung*

$$y''-Ky=0,$$

welche (in der xv-Ebene) durch die Punkte $P_1(0,-M)$ und $P_2(0,M)$ geht. Dann gilt in

$$0\leqq x\leqq\varrho$$

die Ungleichung

$$(11.1)\qquad F_n(x)\geqq y(x).$$

Zum Beweis von (11. 1) setzen wir für den Augenblick $F_n(x)=F(x)$ und rechnen $F''(x)$ aus. Aus (7. 4) folgt zuerst wegen $F'=Q'(u)\,\varphi(u)$

$$F'(x)=\frac{A}{\varphi}-KBG\,\psi+(n-2)\frac{B\varphi}{\psi^{n-1}}.$$

Durch nochmalige Differentiation nach x erhält man dann wegen $F''=(Q'\varphi)'\varphi$

$$F''(x)=AK\omega-KBG\varphi^2-KBG'\psi\varphi+(n-2)\,B\varphi\left(\frac{\varphi}{\psi^{n-1}}\right)'$$

der

$$F''(x) = AK\omega - KBG + K^2BG\psi^2 - KB\psi\varphi\left\{\frac{1+K\omega^2}{\varphi^{n-1}} - \frac{n-1}{\varphi^{n-1}}\right\} - \\ - (n-2)B\varphi\left\{\frac{K\psi}{\varphi^{n-1}} + (n-1)\frac{\varphi^2}{\varphi^n}\right\}.$$

erücksichtigt man hier die Gleichung $F = A\omega - BG$, so wird nach einigen mformungen

$$F''(x) = KF(x) - \frac{(n-1)(n-2)B\varphi^3(u)}{\varphi^n(u)}.$$

Wir betrachten jetzt das Intervall I_2

$$\frac{\varrho}{2} < x < \varrho,$$

dem $F(x)$ positiv und von Null verschieden ist. In diesem Intervall gilt egen $B > 0$

$$F'' - KF < 0.$$

ombiniert man diese Ungleichung mit der Gleichung

$$y'' - Ky = 0,$$

wird wegen $y > 0$

1. 2) $$yF'' - y''F < 0.$$

t nun die Behauptung $F(x) \geqq y(x)$ nicht wahr, so muß es mindestens einen nkt x (und dann wegen der Stetigkeit unendlich viele x) mit $y(x) > F(x)$ ben. Es bezeichne q die untere Grenze dieser Punkte. Dann gilt offenbar $(q) = y(q)$ und $F'(q) \leqq y'(q)$. Wird also $D = yF' - y'F$ gesetzt, so ist $' < 0$, und es folgt durch Integration von $x = q$ bis $(x < \varrho)$:

1. 3) $$D(x) < D(q) = y(q)\{F'(q) - y'(q)\} < 0.$$

s gilt also in $q < x < \varrho$

1. 4) $$y(x)F'(x) - y'(x)F(x) < 0,$$

er noch

$$\frac{F'(x)}{F(x)} < \frac{y'(x)}{y(x)}.$$

urch nochmalige Integration von $x = x$ bis $x = \varrho$ folgt wegen

$$\log F(\varrho) = \log y(\varrho) = \log M$$
$$\log F(x) > \log y(x),$$

er

$$F(x) > y(x),$$

d zwar für jedes $q \leqq x < \varrho$. Dies steht aber im Widerspruch mit der Tatche, daß es rechts von q Stellen x mit $y(x) \geqq F(x)$ gibt.

Es sei ϱ_n die Nullstelle von $F(x)$. Nach den schon bewiesenen Tatsache gilt $\varrho_n < \frac{\varrho}{2}$. Da in $\varrho_n < x \leqq \frac{\varrho}{2}$ $F(x) > 0$ ist, während $y(x)$ negativ ausfällt so gilt im Intervall

$$\varrho_n \leqq x < \varrho \tag{11.5}$$

ebenfalls die Ungleichung

$$F(x) > y(x).$$

Nun betrachten wir das Intervall

$$0 < x < \varrho_n. \tag{11.6}$$

Setzt man hier $F^* = -F > 0$ bzw. $y^* = -y > 0$, so gilt

$$F''^* - KF^* > 0 \quad \text{bzw.} \quad y''^* - Ky^* = 0.$$

Durch Kombination dieser beiden Beziehungen folgt diesmal

$$y^*F''^* - y''^*F^* > 0. \tag{11.7}$$

Es gebe nun in (11. 6) einen Punkt x mit $F^*(x) > y^*(x)$. Da $F^*(x)$ vor $y^*(x$ verschwindet und $F^*(0) = y^*(0) = M$ ist, so müssen diese x, für welche di Ungleichung gilt, eine obere Grenze kleiner als ϱ_n haben. Es sei $\bar{q}$ diese ober Grenze. Es muß dann $y^*(\bar{q}) = F^*(\bar{q})$ und $F'^*(q) \leqq y'^*(\bar{q}) < 0$ gelten. Setz man $D^* = y^*F^{*\prime} - y'^*F^*$, so folgt mit Rücksicht auf (11. 7) $D'^* > 0$ un daraus durch Integration von $x = x < \bar{q}$ bis $x = \bar{q}$:

$$D^*(x) < D^*(q) = y^*(\bar{q})\{F'^*(\bar{q}) - y'^*(q)\} \leqq 0. \tag{11.8}$$

In (11. 8) gilt also $D^*(x) < 0$ oder noch

$$\frac{F'^*(x)}{F^*(x)} < \frac{y'^*(x)}{y^*(x)}.$$

Eine weitere Integration von $x = 0$ bis $x = x < \bar{q}$ liefert dann mit Rücksich auf $F^*(0) = y^*(0) = M$, $F^*(x) < y^*(x)$ in Widerspruch zur Voraussetzung Hiermit ist auch der vollständige Beweis von

$$F(x) \geqq y(x) \tag{11.9}$$

im Intervall $0 \leqq x \leqq \varrho_n$ erbracht worden. Wir könnten hier sogar im offene Intervall das Gleichheitszeichen ausschließen. Da aber diese Tatsache ohn Einfluß auf das Resultat bleibt, so wird hier diese Verschärfung von (11. 9 nicht weiter verfolgt werden. Wichtig ist nur die Tatsache, daß in $F(x) \geqq y(x$ nicht überall das Gleichheitszeichen stehen kann. Daraus folgt leicht, da dies auch in der aus (11. 9) folgenden Ungleichung

$$\frac{F(x)}{\sqrt{M^2 - F^2(x)}} \geqq \frac{y(x)}{\sqrt{M^2 - y^2(x)}}$$

cht der Fall sein kann, und infolgedessen ist

$$J = \int_a^b \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{M^2 - F^2(x)}} > \int_a^b \frac{y(x)\,dx}{\sqrt{M^2 - y^2(x)}} = 0.$$

a nun $J = v_a$ ist, so folgt daraus für $n > 2$ die wichtige Ungleichung > 0.

Die Existenz von γ_0.

12. Bevor wir zum Nachweis der Existenz einer Zahl γ_0 übergehen, e die Körper der Klasse I von denjenigen der Klasse II trennt, wollen wir e Ergebnisse der vorigen Nummern, was die Realität von $\sqrt{M^2 - F_n^2}$ an- trifft, auf die Polynomen Q_γ, $Q_{\gamma,\bar\gamma}$ ausdehnen. Zuerst können wir leicht ststellen, daß diese Funktionen monoton wachsende Funktionen von u sind. er Beweis kann genau wie früher geführt werden. Setzt man nämlich im lgemeinen

$$Q_{\mu\nu} = A\omega - BG$$

it

(2. 1) $\quad A = \mu G(a) + \nu G(b), \quad B = \mu\omega(a) + \nu\,\omega(b), \quad (0 \leqq \mu, \nu \leqq 1),$

ist, wie man unmittelbar einsieht,

$$\omega Q'_{\mu\nu} = \frac{A\omega}{\varphi^2} - KB\omega^2 + (n-2)BG,$$

so $Q'_{\mu\nu} > 0$ für $K \leqq 0$. Genau wie vorher kann man für $K > 0$ die ngleichung

$$Q'_{\mu\nu} > \frac{B}{\varphi^2\,\psi^{n-1}}\{K^{n-1}\psi^{n-1} - (n-1)K\psi^2 + (n-2)\} > 0$$

weisen, was nur eine Wiederholung des Beweises von Nr. 7 erfordert. Da ber

$$Q_{\mu\nu}(a) = -\nu Q(a), \quad Q_{\mu\nu}(b) = \mu Q(b)$$

, so folgt daraus die Realität von $\sqrt{M^2 - Q^2_{\gamma\bar\gamma}}$, $\sqrt{M^2 - Q^2_\gamma}$, wenn man an elle von μ, ν, $\cos\gamma$, $\cos\bar\gamma$ bzw. $\cos\gamma$, 1 schreibt.

Nun betrachten wir zuerst die „Extremalen" der Klasse II. Diese werden rch die Gleichung

$$v + \int_u^b \frac{Q_\gamma\,du}{\varphi\sqrt{M^2 - Q_\gamma^2}} = 0$$

geben mit

$$Q_\gamma = \{G(a)\cos\gamma + G(b)\}\,\omega(u) - \{\omega(a)\cos\gamma + \omega(b)\}\,G(u).$$

Natürlich kommen nur solche Extremalkörper in Betracht, für die $v_a \geqq 0$ ist. Ist $\gamma = 0$, so liegt nach dem vorhin Gesagten der Punkt v_a oberhalb der u-Achse.

Für $\gamma = \frac{\pi}{2}$ wird

$$Q_{\frac{\pi}{2}} = G(b)\,\omega(u) - G(u)\,\omega(b) < 0$$

also $\tilde{v}_a < 0$. Es existiert infolgedessen zuerst mindestens ein Wert γ_0 mit

$$J(\gamma_0) = \int_a^b \frac{Q_{\gamma_0}\,du}{\varphi\sqrt{M^2 - Q_{\gamma_0}^2}} = 0.$$

Daß es nur einen solchen Wert gibt, folgt aus der Monotonie von $J(\gamma)$ unmittelbar. Q_γ ist nämlich wegen

$$\frac{\partial Q_\gamma}{\partial \gamma} = -\sin\gamma\,\{G(a)\,\omega(u) - G(u)\,\omega(a)\} < 0$$

eine mit wachsendem γ abnehmende Funktion von γ. Setzt man

$$J = J(\gamma) = \int_a^b \frac{Q_{\gamma_0}\,du}{\varphi\sqrt{M^2 - Q_\gamma^2}}, \tag{12.2}$$

so ist

$$J'(\gamma) = -\sin\gamma\,M^2 \int_a^b \frac{G(a)\,\omega(u) - G(u)\,\omega(a)}{\varphi\,(M^2 - Q_\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}\,du < 0. \tag{12.3}$$

In (12.2) darf bekanntlich wegen der Struktur des Integranden unter dem Integralzeichen differenziert werden.

Damit der Leser alles beisammen haben möge, sei hier dieser Beweis wiederholt.

Zuerst gilt, wenn man

$$\Phi(u,\gamma) = \frac{Q_\gamma}{\varphi\sqrt{M^2 - Q_\gamma^2}},\quad \Phi_\gamma(u,\gamma) = \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma} = -\sin\gamma\,\frac{G(a)\,\omega(u) - (a)\,G(u)}{\varphi\,(M^2 - Q_\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}$$

setzt,

$$\lim_{u = a+0} \Phi(u,\gamma)\sqrt{u-a} = C_1; \tag{12.4}$$

und wegen des Verschwindens des Zählers in $\Phi_\gamma(u,\gamma)$

$$\lim_{u \to a+0} \Phi_\gamma(u,\gamma)\sqrt{u-a} = C_2$$

it gewissen, nur von a, b und γ abhängigen Konstanten C_1, C_2, welche och im Intervall $0 \leqq \gamma \leqq \frac{\pi}{2}$ endlich bleiben. Nun wird nach dem ersten Iittelwertsatz

$$\frac{\Delta J}{\Delta \gamma} = \int_a^b \Phi_\gamma(u, \gamma + \vartheta\, \Delta\gamma)\, du = J^*(a, b) \qquad (0 \leqq \vartheta \leqq 1).$$

Vir zerlegen alsdann das Integral rechts in zwei Teile

$$J_1 = \int_a^{a+h} \Phi_\gamma du, \quad J_2 = \int_{a+h}^b \Phi_\gamma du$$

nd versuchen durch die Wahl von h die Konvergenz zu erzwingen. Wegen er zweiten Bedingung (12. 3) kann $|J_1|$ allein durch die Wahl von h und nabhängig von $\Delta\gamma$ kleiner als ε gemacht werden. Wählt man noch $\Delta\gamma$ so, aß $\gamma_0 + \Delta\gamma$ im Intervall $0 \leqq \gamma \leqq \gamma_0 - \delta$ $(\delta > 0)$ liegt, so gilt im Intervall $+ h \leqq u \leqq b$

$$\left|\Phi_\gamma(u, \gamma + \vartheta\, \Delta\gamma) - \Phi_\gamma(u, \gamma)\right| \leqq \varepsilon$$

leichmäßig in $\Delta\gamma$. Hiermit wird

$$\left|\frac{\Delta J}{\Delta \gamma} - \int_a^b \Phi_\gamma(u, \gamma)\, du\right| \leqq 3\, \varepsilon.$$

äßt man jetzt $\varepsilon \to 0$ konvergieren, so folgt daraus

$$J'(\gamma) = \lim_{\Delta\gamma \to 0} \frac{\Delta J}{\Delta \gamma} = \int_a^b \Phi_\gamma(u, \gamma)\, du,$$

. h. (12. 3).

13. Wir haben also die Existenz eines einzigen $\gamma_0 \left(0 < \gamma_0 < \frac{\pi}{2}\right)$ nachewiesen, das folgende Eigenschaft hat:

Für jedes γ mit

13. 1) $$0 \leqq \gamma < \gamma_0$$

erührt die „Extremale" K_1

13. 2) $$v - \int_u^b \frac{Q_\gamma\, dx}{\varphi \sqrt{M^2 - Q_\gamma^2}} = 0$$

ie Gerade $u = a$ in einem Punkt oberhalb der u-Achse. Für $\gamma = \gamma_0$ geht ieselbe „Extremale" durch den Punkt $u = a$, $v = 0$. Durch Spiegelung von

K_1 an der u-Achse erhält man eine geschlossene Kurve $K\gamma$, die von den durc Spiegelung auseinander hervorgehenden Kurven K_1, K_2 und der Streck

$$u = a, \quad -v_a \leqq v \leqq v_a, \quad \left(v_a = \int_a^b \frac{Q_\gamma \, du}{\varphi \sqrt{M^2 - Q_\gamma^2}}\right)$$

begrenzt ist. Durch Rotation dieser Kurven nach der vorhin erklärten Weis entstehen dann die Körper der Klasse II. Darauf werden wir noch späte zurückkommen.

Für den Augenblick wenden wir uns der Konstruktion der „Extremalen" von der Klasse I zu. Setzt man

$$Q_{\gamma\bar{\gamma}} = A_{\gamma\bar{\gamma}}\,\omega - B_{\gamma\bar{\gamma}}\,G$$

mit

$$A_{\gamma\bar{\gamma}} = G(a)\cos\bar{\gamma} + G(b)\cos\gamma, \quad B_{\gamma\bar{\gamma}} = \omega(a)\cos\bar{\gamma} + \omega(b)\cos\gamma,$$

so ist die Realität von $\sqrt{M^2 - Q_{\gamma\bar{\gamma}}^2}$ $\left(M = G(a)\,\omega(b) - G(b)\,\omega(a)\right)$ bereit nachgewiesen. Es bleibt nur $\bar{\gamma}$ so zu bestimmen, daß das Integral

$$J(\gamma, \bar{\gamma}) = v_a = \int_a^b \frac{Q_{\gamma\bar{\gamma}}}{\varphi \sqrt{M^2 - Q_{\gamma\bar{\gamma}}^2}}\, du = 0 \tag{13.3}$$

bleibt.

Wir beweisen: *Für jedes γ, das der Ungleichung*

$$\gamma_0 < \bar{\gamma} < \frac{\pi}{2}\ ^{16}) \tag{13.4}$$

genügt, ist die Gleichung (13.3) *eindeutig lösbar.* Mit anderen Worten: *Fü jedes γ aus dem Intervall* (13.1) *gibt es ein $\bar{\gamma}$ (und nur eines), das der Gleichung* (13.2) *genügt.* Zum Beweis dieser Tatsache verfahren wir folgendermaßen Setzt man in (13.2) $\bar{\gamma} = 0$ ein, und macht die Voraussetzung, γ liege im Inter vall (13.4), so ist nach dem vorherigen

$$J(\gamma, 0) < 0.$$

Dagegen ist für $\bar{\gamma} = \frac{\pi}{2}$ wegen

$$Q_{\gamma\,\frac{\pi}{2}} = \cos\gamma\,\{G(a)\,\omega(u) - G(u)\,\omega(a)\} > 0$$

$$J\left(\gamma, \frac{\pi}{2}\right) = \int_a^b \frac{Q_{\gamma,\frac{\pi}{2}}}{\varphi \sqrt{M^2 - Q^2_{\gamma,\frac{\pi}{2}}}}\, du > 0.$$

[16]) Für $\gamma = \gamma_0$ ist $\dot{\gamma} = 0$. Man kann deswegen das Gleichheitszeichen links aus schließen.

Es existiert also mindestens ein γ, so daß (13. 2) erfüllt ist. Daß nur ein einziges $\bar{\gamma}$ existiert, folgt leicht aus der Ableitung von $J(\gamma, \bar{\gamma})$ nach $\bar{\gamma}$:

$$\frac{\partial J(\gamma,\bar{\gamma})}{\partial \bar{\gamma}} = \sin\bar{\gamma} \int_a^b \frac{\{G(u)\,\omega(b) - G(b)\,\omega(u)\}}{\varphi\,(M^2 - Q_{\gamma}^2\bar{\gamma})^{\frac{3}{2}}}\,du > 0.$$

Hier kann unbedenklich unter dem Integralzeichen differenziert werden, da die Grenzen $\bar{\gamma} = 0$, $\bar{\gamma} = \frac{\pi}{2}$ ausgeschlossen sind, und somit der Nenner von (13. 3) in $a \leqq u \leqq b$ von Null verschieden bleibt.

Übrigens kann man aus (13. 3) sehr leicht schließen, daß $\bar{\gamma}$ eine stetige und stetig differenzierbare Funktion von γ ist, falls γ im Intervall (13. 4) liegt und daß dort $\frac{d\bar{\gamma}}{d\gamma} > 0$. Hat man nun γ_0 konstruiert, so kann man eine Extremale K_1 konstruieren, die durch $(a, 0)$, $(b, 0)$ geht. Durch Spiegelung von K_1 an der u-Achse erhält man dann eine geschlossene Extremale $K_{\gamma\gamma}$.

Somit ist zugleich die Konstruktion der Extremalen von der Klasse I durchgeführt. Zu dieser Konstruktion sei noch folgendes gesagt: Genau wie vorhin kann gezeigt werden, daß die vorhin bewiesene Monotonie der Integrale

$$\int_a^b \frac{Q_{\gamma\bar{\gamma}}}{\varphi\sqrt{M^2 - Q_{\gamma\bar{\gamma}}^2}}\,du, \qquad \int_a^b \frac{Q_{\gamma}\,du}{\varphi\sqrt{M^2 - Q_{\gamma}^2}}$$

auch dann gilt, wenn an Stelle von a ein fester Wert u aus dem Intervall $\leqq u \leqq b$ steht. Hiermit wird zugleich gezeigt, daß die Kurven einer bzw. zweier verschiedener Klassen sich nicht schneiden und sonst auch keine Punkte gemeinsam haben, außer höchstens die Randpunkte $u = a$, $v = 0$ bzw. $u = b$, $v = 0$.

14. Wir fassen die Ergebnisse dieser Nummer für $n \geqq 3$ nochmals zusammen:

Man kann im Streifen

(14. 1) $$a \leqq u \leqq b \quad (0 < a < b)$$

des Fundamentalbereiches G_0 der vier hier betrachteten Geometrien drei Klassen von Kurven konstruieren.

Die Kurven aller Klassen sind einfach geschlossen (Fig. 2) symmetrisch in bezug auf die u-Achse und genügen der Differentialgleichung

(14. 2) $$\varphi\frac{dv}{du} \pm \frac{k_g\,\Phi(u)}{\sqrt{1 - k_g\,\Phi^2(u)}} = 0$$

oder

(14. 3) $$\varphi\frac{dv}{du} \pm \frac{Q_g(u)}{\sqrt{M^2 - Q_g^2(u)}} = 0,$$

wobei das Pluszeichen für die obere Hälfte der betreffenden Kurve zu nehmen ist. Ferner ist $Q_\vartheta = Q_{\gamma\bar{\gamma}}$ für die Klasse I, $Q_\vartheta = Q_\gamma$ für die Klasse II und $Q_\vartheta = Q$ für die Klasse III.

Die ausführlichen Darstellungen von Q, Q_γ, $Q_{\gamma\bar{\gamma}}$ sind früher angegeben worden. Die Kurven der Klasse I und II werden durch die Kurve $C\gamma_0$ getrennt, die man als zu beiden Klassen zugehörige Kurven betrachten kann.

Die äußere Normale von C_{γ_0} bildet in $u = b$, $v = 0$ mit der positiven u-Achse den Winkel γ_0, wie dies in der Fig. 2 gezeigt wird und berührt die Gerade $u = a$ im Punkte $u = a$, $v = 0$.

Jede Kurve der Klasse I bildet mit der u-Achse einen größeren Winkel als γ_0, und jede Kurve von der Klasse II einen kleineren Winkel als γ_0. Die Kurven von der Klasse II und III werden durch die Kurve C_0 getrennt, welche die Gerade $u = a$ in den Punkten $u = a$, $v = v_a$ (bzw. $v = -v_a$) und die Gerade $u = b$, $v = 0$ berührt. Die Kurven von der Klasse III gehen dann aus C_0 hervor, indem man ihre beiden Hälften wie zwei Teile eines Teleskops in der $\pm v$-Richtung auseinanderzieht.

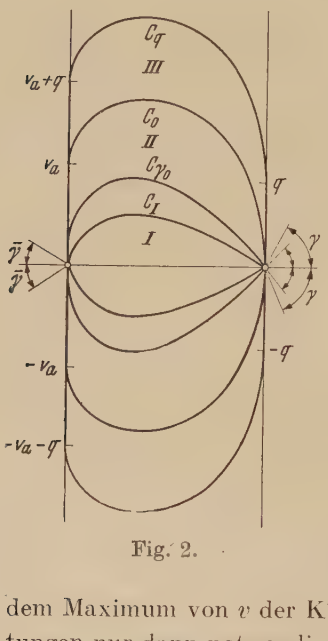


Fig. 2.

Für $n = 2$ ist γ_0 dauernd Null, die Klassen I und II bilden eine einzige Klasse. Wir werden in diesem Falle von Kurven der Klassen I und III sprechen. Diese Betrachtungen gelten für $K \leqq 0$ ohne irgendwelche Einschränkung. Für $K > 0$ müssen diese Betrachtungen noch durch den Nachweis ergänzt werden, daß alle Kurven der Klassen I und II bis zur Kurve C_0 im Fundamentalbereich G_0 liegen. Inwieweit es Kurven von der Klasse III gibt, wird von dem Maximum von v der Kurve C_0 abhängen. Natürlich sind diese Betrachtungen nur dann notwendig, wenn eine einfache Bedeckung des betreffenden Raumes durch die Extremalkörper verlangt wird.

Nach den früheren Entwicklungen genügt es nun nachzuweisen, daß das Integral

$$v_{\max} = J = \int_{u^*}^{b} \frac{Q\,du}{\varphi\sqrt{M^2 - Q^2}}, \tag{14.4}$$

wobei u^* durch die Gleichung

$$\psi^{n-1}(u^*) = \varrho^{n-1} = \frac{\omega(a) + \omega(b)}{G(a) + G(b)} = \frac{B}{A} \tag{14.5}$$

estimmt wird, innerhalb des Fundamentalbereiches G_0 von $ds^2 = du^2 + \varphi^2(u)\,dv^2$ liegt, da dieses das Maximum von v auf C_0 darstellt. Zum Beweis ehmen wir wieder der Einfachheit halber $K = 1$, was keine Einschränkung er Allgemeinheit bedeutet. ψ, φ werden also im folgenden gewöhnliche igonometrische Funktionen darstellen. Nun ist

$$J = \int_{u^*}^{b} \frac{\frac{\psi}{\varphi^2}\left\{A - \frac{B}{\psi^{n-1}}\right\} du}{\sqrt{M^2 - \frac{\psi^2}{\varphi^2}\left(A - \frac{B}{\psi^{n-1}}\right)^2}}.$$

Führt man an Stelle u die Veränderliche $Q(u)$ ein und beachtet an, daß

$$\frac{dQ}{du} = \frac{1}{\varphi^2}\left\{A - \frac{B}{\psi^{n-1}}\right\} + (n-1)\frac{B}{\psi^{n}} \geqq \frac{\psi}{\varphi^2}\left\{A - \frac{B}{\psi^{n-1}}\right\}$$

t, so erhält man, wenn man noch für $Q(u)$ λ schreibt,

$$J < \int_0^M \frac{d\lambda}{\sqrt{M^2 - \lambda^2}} < \frac{\pi}{2}, \tag{14.8}$$

omit zugleich bewiesen wird, daß der Punkt $(u^*, v_{\max})$ noch im Fundamentalereich liegt. Ist $K > 0$ und beliebig, so findet man an Stelle von (14.8)

$$\eta_0 = v_{\max} < \frac{\pi}{2\sqrt{K}}.$$

omit ist für den elliptischen wie für den sphärischen Fall gezeigt, daß alle urven der Klassen I und II im Fundamentalbereich G_0 liegen. Außerdem egen für $K > 0$ wegen (6.41) auch diejenigen Kurven der Klassen III in G_0, ir welche

$$q + 2\eta_0 < \frac{\pi}{2\sqrt{K}} \tag{14.9}$$

lt.

Kapitel III.

Die Grundlagen der Untersuchung. Der Gaußsche Divergenzsatz für die regulären Körper von Erhard Schmidt.

orbereitende Tatsachen und Anfang des Beweises des Schmidtschen Satzes.

15. Der Beweis der Extremaleigenschaft der durch Rotation der Kurven er Klassen I, II, III entstehenden Körper $\mathfrak{K}_{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{K}_{\mathrm{II}}$ und $\mathfrak{K}_{\mathrm{III}}$ wird auf Grund lgender Gleichung geführt werden:

$$(n-1)(V - V_g) = \varrho_g(O - O_g) - 2\,\varrho_g R(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}_g), \tag{15.1}$$

wobei g eine der Zahlen I, II, III (oder entsprechend gleich $\gamma\bar{\gamma}$, γ oder q is und V_g bzw. O_g jedesmal das Volumen bzw. die Oberfläche des betreffende „Extremalkörpers" $\mathfrak{K}_g$ bedeuten.

Ferner ist $R(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}_g)$ ein positives Restglied, das dann und nur dann ver schwindet, wenn $\mathfrak{K}$ bis auf Parallelverschiebung mit $\mathfrak{K}_g$ übereinstimmt. Fü die Größe ϱ_g gilt:

$$\varrho_g = \frac{G(a)\,\omega(b) - G(b)\,\omega(a)}{G(a)\cos\bar{\gamma} + G(b)\cos\gamma} \quad \text{für} \quad \mathfrak{K}_{\mathrm{I}} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{K}_{\gamma\bar{\gamma}},$$

$$\varrho_g = \frac{G(a)\,\omega(b) - G(b)\,\omega(a)}{G(a) + G(b)\cos\gamma} \quad \text{für} \quad \mathfrak{K}_{\mathrm{II}} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{K}_{\gamma}$$

und

$$\varrho_g = \frac{G(a)\,\omega(b) - G(b)\,\omega(a)}{G(a) + G(b)} \quad \text{für} \quad \mathfrak{K}_{\mathrm{III}} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{K}_{q}.$$

Bevor wir zum Beweis von (15. 1) übergehen, erwähnen wir kurz einig Formeln, welche den Inhalt bzw. die Oberfläche eines Rotationskörpers i einem n-dimensionalen nichteuklidischen Raum bestimmen[17]).

Als Definition eines Rotationskörpers $\mathfrak{K}$ wird folgende Definition zu grunde gelegt: $\mathfrak{K}$ soll „Rotationskörper" heißen, falls er bei allen Drehunge des betreffenden Raumes, die eine nichteuklidische Gerade g fest lassen, i sich übergeht.

Wird der betreffende Raum mittels Weierstrassscher homogener Ko ordination $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ durch[18])

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + \frac{x_{n+1}^2}{K} = \frac{1}{K}$$

dargestellt, so wird eine Rotation im allgemeinen durch eine lineare Trans formation

$$x_i' = \sum_1^{n+1} a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1$$

wiedergegeben, welche die Fundamentalform (3. 3) und eine nichteuklidisch Gerade invariant lassen. Im Falle eines n-dimensionalen sphärischen Raume handelt es sich hierbei um Drehungen der Kugel

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = \frac{1}{K} \qquad (K > 0)$$

die einen Großkreis invariant lassen[19]).

[17]) Nachfolgende Formeln wurden in dieser Form zum erstenmal in meiner i Fußnote 2 zitierten Abhandlung bewiesen.

[18]) Für den sphärischen Raum muß $x_{n+1} = \sqrt{K}\, x'_{n+1}$ gesetzt werden.

[19]) Ausführliches l. c., S. 709ff.

Nun setzen wir die Transformationsformeln (3. 7) zugrunde und nehmen n, daß die Rotationsachse mit der ϑ_n-Parameterlinie übereinstimmt.

Zur Erzeugung von $\mathfrak{K}$ durch Rotation einer Meridiankurve C betrachten ir den Raum r, x_n, x_{n+1} mit

$$r = \sum_1^{n-1} x_\nu^2,$$

nd setzen noch $r = y_1$, $x_n = y_2$ und $x_{n+1} = y_3$. Wir setzen (mit der üblichen nderung von y_3 im Falle eines sphärischen Raumes)

15. 2)
$$\begin{aligned} y_1 &= \psi(u) \\ y_2 &= \varphi(u)\,\psi(v) \\ y_3 &= \varphi(u)\,\varphi(v) \end{aligned}$$

nd betrachten in dem Fundamentalbereich dieses Raumes eine dort ge-chlossene, in

$$0 \leqq a \leqq u \leqq b$$

inbeschriebene Kurve C^* mit den Parametergleichungen[20])

$$u = u(t), \quad v = v(t) \quad (t_0 \leqq t \leqq t_1).$$

ann lautet die Gleichung der Oberfläche O des durch die Rotation von C m die ϑ_n-Parameterlinie erzeugten Körpers

$$\prod_1^{n-1} \varphi(\vartheta_i) = \varphi\big(u(t)\big), \quad \vartheta_n = v(t).$$

16. Bedeutet nun s die Bogenlänge von C in dem betreffenden Raum[21]), o zeigt eine Rechnung, die mit der in meiner vorhin erwähnten Abhandlung urchaus analog ist, daß die Oberfläche bzw. das Volumen von $\mathfrak{K}$ durch die-lben Formeln

16. 1)
$$O = (n-1)\,W_{n-1} \int_C \psi^{n-2}(u)\,ds$$

16. 2)
$$V = W_{n-1} \int_C \psi^{n-1}(u)\,\frac{dv}{ds}\,ds$$

egeben werden[21]). W_{n-1} bedeutet hier den Inhalt der $(n-1)$-dimensionalen inheitskugel. Die Integration wird hier in dem Bereich längs der geschlossenen urve C in dem üblichen positiven Sinne erstreckt werden.

[20]) u, v werden als periodische Funktionen von t mit der Periode $t_1 - t_0$ voraus-esetzt. Ferner wird angenommen, daß u, v bis auf endlich viele Werte von t stetig nd stetig differenzierbar sind. Diese Annahmen können unter Zugrundelegung des EBESGUEschen Integrals erheblich gelockert werden.

[21]) Es ist $ds^2 = du^2 + \varphi^2(u)\,dv^2$.

Da C geschlossen ist, so kann man an Stelle von (7. 14) auch die Formeln

$$(16,3) \qquad \begin{aligned} O &= (n-1)\, W_{n-1} \int_C \psi^{n-2}(u)\, ds \\ V &= W_{n-1} \int_C \{\psi^{n-1}(u) + A\} \frac{dv}{ds}\, ds \end{aligned}$$

mit einem konstanten A gebrauchen.

Wir gehen nun dazu über, die Richtungskosinus $\cos(\bar{n}, \vartheta_i)$ der äußeren Normalen $\bar{n}$ eines Körpers $\mathfrak{K}_g$ zu bestimmen. Wir werden zeigen:

Wird

$$\Phi_g(u) = \omega(u) + A_g G(u)$$

gesetzt, so gilt

$$(16.4) \qquad g_i \cos(\bar{n}, \vartheta_i) = k_g\, \omega(\vartheta_i) + A_g\, k_g \frac{\omega(\vartheta_i)}{\psi^{n-1}(u)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

Zuerst gilt für die Komponenten der Normalen $\mathfrak{x}$ der Kurve C in der u, v-Ebene

$$\begin{aligned} \cos(\mathfrak{x}, u) &= \varphi \frac{dv}{ds} = k_g \Phi_g \\ \cos(\mathfrak{x}, v) &= -\frac{du}{ds} = \pm \sqrt{1 - k_g^2 \Phi_g^2}. \end{aligned}$$

Durch Rotation wird der Vektor $\bar{n}$ in eine neue Lage gebracht, und zwar so, daß die Komponenten $\cos(\bar{n}, \vartheta_1), \ldots, \cos(\bar{n}, \vartheta_{n-1})$ des so entstandenen Rotationskörpers proportional zu den $n-1$ ersten Komponenten der Normale $\mathfrak{y}$ der Kugel

$$(16.5) \qquad \varphi(\vartheta_1)\, \varphi(\vartheta_2) \ldots \varphi(\vartheta_{n-1}) = \varphi(u)$$

werden. Ferner wird noch

$$\cos^2(\bar{n}, \vartheta_1) + \cdots + \cos^2(\bar{n}, \vartheta_{n-1}) = k_g^2 \Phi_g^2.$$

Da nun für die Richtungskosinus $\cos(\mathfrak{y}, \vartheta_i)$ der Normalen von (16. 5) für $i = 1, 2, \ldots, n-1$, wie dies in meinen vorhin zitierten Arbeiten ausführlicher gezeigt worden ist, die Gleichungen

$$g_i \cos(\mathfrak{y}, \vartheta_i) = \frac{\omega(\vartheta_i)}{\omega(u)}$$

gelten, so folgt daraus (16. 4). Für $\cos(\bar{n}, \vartheta_n)$ findet man wegen $\cos(\bar{n}, \vartheta_n) = \cos(\mathfrak{x}, v)$,

$$\cos(\bar{n}, \vartheta_n) = \pm \sqrt{1 - k_g^2 \Phi_g^2}.$$

Dabei ist für den oberen Teil der Extremalfläche ($v \geqq 0$) das Pluszeichen zu nehmen und für den unteren Teil das Minuszeichen.

Ein fundamentaler Hilfssatz. Die regulären Körper von Erhard Schmidt.

17. Der nächste Schritt zur Begründung der isoperimetrischen Ungleichung (15. 1) besteht in dem Beweis folgenden Hilfssatzes: *Ist $\mathfrak{K}$ ein im Fundamentalbereich liegender Körper, so ist der Ausdruck*

$$J = \sum_{i=1}^{n-1} \int \frac{\omega(\vartheta_i)}{\psi^{n-1}(u)} \frac{\cos(n, \vartheta_i)}{g_i} \, dO \tag{17. 1}$$

gleich Null.

Die Integrale sind hier über die Gesamtoberfläche O von $\mathfrak{K}$ zu erstrecken. Ferner bedeutet dO das Oberflächenelement von $\mathfrak{K}$. Zum Beweis dieses richtigen Satzes werden wir die allgemeine Form des Gaussschen Divergenzsatzes

$$\int_{\mathfrak{K}} \operatorname{div} \mathfrak{A} \, d\tau = \sum_{i=1}^{n} \int \Phi_i \, a^i \, dO \tag{17. 2}$$

benutzen[22]). Hierin sind a^i die kontravarianten Komponenten eines Vektors $\mathfrak{A}$ und der Ausdruck für div $\mathfrak{A}$ wird durch die Formel

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{1}^{n} \frac{\partial \sqrt{g}\, a^i}{\partial \vartheta_i}$$

gegeben. Dabei bedeutet g die Determinante der Koeffizienten g_{ik} der Metrik

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik} d\vartheta^i d\vartheta^k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Ferner sind Φ_i die kovarianten Komponenten der äußeren Normalen n von $\mathfrak{K}$, die später ausführlicher erklärt werden.

18. Bevor wir zur rein technischen Anwendung des Gaussschen Satzes (17. 2) übergehen, wollen wir die hier eintretenden Begriffe etwas genauer definieren. Wie in der Einleitung erwähnt wurde, sind die in Betracht kommenden Körper nicht beliebig, sondern weisen gewisse Regularitätseigenschaften auf, besonders was die Struktur ihres Randes betrifft. Aus diesem

---

[22]) Einen Beweis dieses Satzes kann man bei Duscheck-Mayer, Lehrbuch der Differentialgeometrie II, S. 240, Teubner, 1930, nachlesen. Beweise des Gaussschen Divergenzsatzes gibt es mehrere. Die meisten nehmen an, daß der betreffende Körper so beschaffen ist, daß jede Gerade, die den Körper trifft, seine Oberfläche in endlich vielen Punkten schneidet. Einen Beweis, der für allgemeine Mannigfaltigkeiten gilt und keine solche einschränkenden Voraussetzungen macht, gab Brouwer (Opmerking over meervoudige Integralen. Koninklijke Akad. van Wetenschappen be Amsterdam, Bd. 28, 1919), und zwar durch Approximation der Mannigfaltigkeit mittels Simplexnetzen.

Grunde wollen wir einige Seiten dem Studium der hier in Frage kommenden Körper, der regulären Körper von ERHARD SCHMIDT, widmen[23]).

Nach dem Vorbild von ERHARD SCHMIDT[24]) werden wir eine Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ als regulären Körper bezeichnen, wenn sie folgenden Bedingungen genügt:

1) $\mathfrak{M}$ ist eine beschränkte, in G_0 liegende, abgeschlossene Punktmenge.
2) Innere Punkte und Randpunkte werden wie gewöhnlich in bezug auf G_0 definiert.
3) Die Menge der inneren Punkte ist nicht leer.
4) Jeder Randpunkt ist Häufungspunkt von inneren Punkten.
5) Die inneren Punkte hängen in dem üblichen Sinne zusammen.
6) Der Rand von $\mathfrak{M}$ besteht aus endlich vielen (gleich zu erklärenden Mannigfaltigkeiten, von denen je zwei nur Punkte gemeinsam haben können, die hier bei den Mannigfaltigkeiten Randpunkte sind.

Die wichtigste Einschränkung ist hier zweifellos die Bedingung 6), welche die Struktur des Randes betrifft.

Zu ihrem Verständnis ist der ebenfalls von ERHARD SCHMIDT eingeführte Begriff des k-dimensionalen Grundgebildes notwendig[25]).

19. Ein k-dimensionales Grundgebilde ($1 \leqq k \leqq n-1$) ist in G_0 durch die Gleichungen

$$\vartheta_\nu = \vartheta_\nu(t_1, \ldots, t_k) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{19.1}$$

$$a'_\lambda \leqq t_\lambda \leqq a''_\lambda \qquad (a'_\lambda < a''_\lambda,\ \lambda = 1, 2, \ldots, k) \tag{19.2}$$

definiert. Die Funktionen $\vartheta_\nu(t_1, \ldots, t_k)$ werden als zweimal stetig differenzierbar angenommen und die Matrix $\left\{\frac{\partial \vartheta_\nu}{\partial t_\lambda}\right\}$ wird in jedem Punkt des Definitions-

[23]) In seiner in der Fußnote 3 zitierten Arbeit zuerst im euklidischen Raum eingeführt. In einer neuen Arbeit (Mathem. Zeitschr. **49**, 1943, S. 1—109, insbesondere S. 30), deren Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im hyperbolischen und sphärischen Raum jeder Dimensionszahl, deren Kenntnis Verf. vor der Publikation erhalten hat, ist auch die Übertragung auf den hyperbolischen bzw. sphärischen Raum durchgeführt. Die hier angegebene Darstellung schließt sich eng an die euklidische SCHMIDTsche Darstellung an und verfolgt den Zweck, dem Leser eine Umschreibung der SCHMIDTschen Bezeichnungen in die unseren und die Durchführung einiger abweichender Punkte zu ersparen. Von diesen soll hier nur betont werden, daß z. B. der Beweis des GAUSSschen Divergenzsatzes anders als bei E. SCHMIDT durchgeführt wird.

[24]) l. c., Fußnote 3, S. 735. Vgl. auch einige Vereinfachungen der ganzen Darstellung in der zuletzt in Fußnote 23 zitierten Arbeit S. 30. Diese Arbeiten werden im folgenden mit SCHMIDT I bzw. SCHMIDT II bezeichnet werden.

[25]) l. c., Fußnote 3, S. 717. In seiner neuen Arbeit hat E. SCHMIDT das k-dimensionale Grundgebilde der zweifach glatten Mannigfaltigkeit untergeordnet und hiermit einige Vereinfachungen der Darstellung erzielt (SCHMIDT II, S. 31).

ereiches (19. 2) vom Range k vorausgesetzt. Ferner wird auch angenommen, aß die durch die obigen Funktionen vermittelte Abbildung eindeutig umehrbar und somit auch die Umkehrung stetig ist. Ein Punkt $P(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n)$ t ein innerer Punkt des Grundgebildes, sobald das Urbild $T(t_1, \ldots, t_k)$ n innerer Punkt von (19. 2) ist.

Mit Hilfe des Begriffes des Grundgebildes definieren wir jetzt eine Klasse on nicht notwendig zusammenhängenden Punktmengen $\mathfrak{M}_k$, welche folgenden orderungen genügen:

I. $\mathfrak{M}_k$ liegt in G_0 und ist eine beschränkte abgeschlossene Punktmenge.

II. Zu jedem Punkt von $\mathfrak{M}_k$ läßt sich ein Grundgebilde G_k bestimmen, essen Inneres diesen Punkt einschließlich einer gewissen Umgebung des unktes auf $\mathfrak{M}_k$ bedeckt. Falls das Grundgebilde sich so wählen läßt, daß es anz von $\mathfrak{M}_k$ bedeckt wird, heißt der betreffende Punkt ein innerer Punkt. onst bezeichnet man ihn als Randpunkt.

III. $\mathfrak{M}_k$ besitzt innere Punkte.

IV. Jeder Randpunkt ist Häufungspunkt von inneren Punkten. Nach efinition dieser Punktmengen ist die Definition der k-dimensionalen Mannigltigkeit folgendermaßen induktiv zu führen[26]):

1. Zunächst ist eine 0-dimensionale Mannigfaltigkeit ein Punkt.
2. Eine eindimensionale reguläre Mannigfaltigkeit ist eine zusammenhängende Punktmenge $\mathfrak{M}_1$, welche den vorhin aufgestellten Bedingungen für $k = 1$ genügt.
3. Allgemein ist eine k-dimensionale reguläre Mannigfaltigkeit ($2 \leqq k \leqq n - 1$) als eine zusammenhängende Punktmenge $\mathfrak{M}_1$ definiert, welche den Forderungen I bis IV für $k = k$ und noch folgender Bedingung über den Rand genügt: Falls $\mathfrak{M}_k$ überhaupt Randpunkte besitzt, bildet die Menge dieser Randpunkte endlich viele reguläre $(k - 1)$-dimensionale Mannigfaltigkeiten, von denen je zwei nur Punkte gemeinsam haben, die auf beiden Mannigfaltigkeiten Randpunkte sind.

Nach Definition der k-dimensionalen regulären Mannigfaltigkeit ist auch e Bedingung 6) der Definition eines regulären Körpers erledigt und somit eser selbst vollkommen definiert. Nach dieser Definition ist der Begriff es regulären Körpers eine Invariante gegenüber allen eindeutigen zweimal etig differenzierbaren Abbildungen des T-Raumes.

Es darf hier nochmals daran erinnert werden, daß alle diese Betrachngen sich in G_0 abspielen. Sie beziehen sich also immer auf das euklidische bbild des Körpers $\mathfrak{K}$. Da bis jetzt alle Betrachtungen topologischer Natur

[26]) Schmidt I, S. 723.

sind, so ist bis auf weiteres alles in Ordnung, solange das Oberflächenelement noch nicht definiert ist. Dieses wird in Analogie mit dem euklidischen Fall eingeführt werden.

20. Nun kommen wir zu der wichtigsten Eigenschaft der regulären Körper, welche die SCHMIDTsche Annahme über die zweimalige Differenzierbarkeit ins rechte Licht setzt.

Wir betrachten für den Augenblick G_0 als einen Raum mit euklidischer Struktur, d. h. mit euklidischer Metrik und mit der üblichen Vorstellung der Geraden, Ebenen und Hyperebenen[27]) in ihm. Dann lautet das SCHMIDTsche Hauptergebnis: Es gibt ein rechtwinkliges Koordinatensystem $O\vartheta'_1 \ldots \vartheta'_n$, das aus dem ursprünglichen System $O\vartheta_1 \ldots \vartheta_n$ durch eine infinitesimale Drehung hervorgeht, mit folgender Eigenschaft: Für jede Koordinatenachse $O\vartheta'_\nu$ gibt es nur endlich viele Hyperebenen[28]) $\vartheta_\nu = \text{konst.}$, welche $\mathfrak{K}$ (im euklidischen Sinne) berühren.

Wir können hier den Beweis dieses SCHMIDTschen Satzes nicht wiedergeben, sondern wir verweisen auf die Originalarbeit von ERHARD SCHMIDT. Hier begnügen wir uns, kurz auf die Folgerungen dieses wichtigen Satzes hinzuweisen.

21. Wir fassen zuerst eine bestimmte reguläre Mannigfaltigkeit $\mathfrak{R}^{(i)}_{n-}$ aus den endlich vielen solchen, aus denen die Oberfläche O unseres Körpers $\mathfrak{K}$ voraussetzungsgemäß besteht, ins Auge. Dann kann man beweisen[29]):

Es gibt ein $\eta > 0$, so daß ein beliebiges n-dimensionales achsenparalleles[30]), berührungsfremdes Parallelotop π [d. h. ein Parallelotop, dessen Flächenseiten den Körper im euklidischen Sinne nicht berühren[31])], dessen Kantenlänge kleiner als η ist, die Eigenschaft hat, daß der Durchschnitt von $\mathfrak{R}^{(i)}_{n+1}$ mit π durch eine Gleichung der Form

$$\vartheta'_{\nu_n} = f_{\nu_n}(\vartheta'_{\nu_1}, \ldots, \vartheta_{\nu_{n-1}}), \tag{21.1}$$

wobei $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ darstellt (welche von der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{R}^{(i)}_{n-1}$[32]) und dem Parallelotop π abhängt), gegeben

[27]) Hier interessieren wir uns natürlich nur für diejenigen Teile der (unendlich gedachten) Hyperebenen, welche in G_0 liegen.

[28]) SCHMIDT I, S. 737. Der Satz wird zuerst für eine einzige Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ bewiesen. Da die Oberfläche O von $\mathfrak{K}$ aus endlich vielen solchen Mannigfaltigkeiten besteht, so gilt offenbar dieser Satz auch für O.

[29]) SCHMIDT I, S. 747.

[30]) Achsenparalleles Parallelotop, ein Parallelotop, dessen Kanten parallel zu den Koordinatenachsen $O\vartheta'_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ sind.

[31]) Vgl. SCHMIDT I, S. 745.

[32]) Die Abhängigkeit der betreffenden Mannigfaltigkeit $\mathfrak{R}^{(i)}$ von i wird in der Zukunft nicht unbedingt hervorgehoben.

ird. Dabei durchlaufen $\vartheta'_{\nu_1}, \ldots, \vartheta'_{\nu_{n-1}}$ das Parallelotop π' Projektion von π arallel zur ϑ'_{ν_n}-Achse.

Nun zerlegen wir den *ganzen* euklidischen ϑ'_i-Raum durch endlich viele n den Koordinatenachsen senkrechte $(n-1)$-dimensionale Ebenen in berührungsfreie Parallelotope, so daß keine von ihnen irgendwelche der regulären annigfaltigkeiten berührt. Dabei nehmen wir die Kantenlängen $\delta\,(\delta < \eta)$ er Würfel des so entstehenden Netzes $\mathfrak{N}_\delta$ so klein, daß jedes Parallelotop π es Netzes, welches überhaupt Punkte des Körpers $\mathfrak{K}$ enthält, ganz in G_0 liegt. iese Parallelotope sind endlich viele und können numeriert werden.

Nun kann man jeden Teil der endlich vielen Mannigfaltigkeiten durch ne Gleichung von der Form (21. 1) darstellen. Da die ϑ_ν aus den ϑ'_ν durch ne lineare Transformation hervorgehen, so werden die ϑ_ν durch Gleichungen

$$\vartheta_{\nu_n} = F_{\nu_n}(\vartheta'_{\nu_1}, \ldots, \vartheta'_{\nu_{n-1}}) \tag{21. 2}$$

egeben, wobei die $\vartheta'_{\nu_1}, \ldots, \vartheta'_{\nu_{n-1}}$ vom Parallelotop π_τ $(\tau = 1, \ldots, q)$ abängen und in dessen Projektion π'_τ längs der ϑ'_{ν_n}-Achse sie variieren. Wir erden im folgenden an Stelle von ϑ'_{ν_i} t_{ν_i} schreiben, also an Stelle (21. 2) die leichungen

$$\vartheta_{\nu_n} = F_{\nu_n}(t_{\nu_1}, \ldots, t_{\nu_{n-1}}) \tag{21. 3}$$

enutzen. Dabei wird gleich bewiesen, daß in jedem Punkt des Würfels π indestens eine der Unterdeterminanten vom Range $n-1$ der Funktionalatrix

$$\left\{\frac{\partial \vartheta_k}{\partial t_{\nu_\lambda}}\right\} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{21. 4}$$

on Null verschieden ist.

Es sei in der Tat

$$\vartheta_i = \sum_k a_i^k \vartheta'_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{21. 5}$$

ie orthogonale Transformation, die den Übergang zu den Koordinaten ϑ_i ewirkt.

Drückt man dann in diesen Formeln ϑ'_{ν_λ} durch $f_\lambda(\vartheta'_{\nu_1}, \ldots, \vartheta'_{\nu_{n-1}})$ aus, o erhält man rechts eine bestimmte Funktion von $\vartheta'_\nu, \ldots, \vartheta'_{\nu_{n-1}}$, und es leibt nur nachzuweisen, daß mindestens eine der Funktionaldeterminanten om Range $n-1$ der Funktionalmatrix (21. 4) von Null verschieden ist.

Dazu setzen wir für den Augenblick, wie vorhin, $\vartheta'_{\nu_\mu} = t_\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots n-1)$ und bezeichnen mit $D'_{r_1 r_2 \ldots r_{n-1}}$ die Determinante

$$D'_{r_1 r_2 \ldots r_{n-1}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \vartheta'_{r_1}}{\partial t_1} & \frac{\partial \vartheta'_{r_2}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \vartheta'_{r_{n-1}}}{\partial t_1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial \vartheta'_{r_1}}{\partial t_{n-1}} & \frac{\partial \vartheta'_{r_2}}{\partial t_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial \vartheta'_{r_{n-1}}}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix}$$

und mit $A^{r_1 \ldots r_{n-1}}_{\nu_1 \ldots \nu_{n-1}}$ die Determinante

$$A^{r_1 \ldots r_{n-1}}_{\nu_1 \ldots \nu_{n-1}} = \begin{vmatrix} a^{r_1}_{\nu_1} & a^{r_1}_{\nu_2} & \cdots & a^{r_1}_{\nu_{n-1}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a^{r_{n-1}}_{\nu_1} & a^{r_{n-1}}_{\nu_2} & \cdots & a^{r_{n-1}}_{\nu_{n-1}} \end{vmatrix}.$$

Dann gilt, wenn man allgemein mit $\sum_{(\varrho_1 \ldots \varrho_{n-1})}$ eine sich über alle geraden Permutationen $\varrho_1 \ldots \varrho_{n-1}$ erstreckende Summation bezeichnet,

$$(21.6) \qquad \sum_{(\nu_1 \ldots \nu_{n-1})} D^2_{\nu_1 \ldots \nu_{n-1}} = \sum_{(r_1 \ldots r_{n-1})} A^{2 r_1 \ldots r_{n-1}}_{\nu_1 \ldots \nu_{n-1}} D'^2_{r_1 \ldots r_{n-1}},$$

wobei $D_{\nu_1 \ldots \nu_{n-1}}$ die Determinante

$$(21.7) \qquad D_{\nu_1 \ldots \nu_{n-1}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \vartheta_{\nu_1}}{\partial t_1} & \frac{\partial \vartheta_{\nu_2}}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial \vartheta_{\nu_1}}{\partial t_{n-1}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial \vartheta_{\nu_{n-1}}}{\partial t_1} & \frac{\partial \vartheta_{\nu_{n-1}}}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial \vartheta_{\nu_{n-1}}}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix}$$

bedeutet[33]). Nun ist rechts nach Voraussetzung mindestens eine der Determinanten $D'_{r_1 \ldots r_{n-1}}$ von Null verschieden und nach den bekannten Tatsachen der orthogonalen Transformation

$$(21.8) \qquad A^{r_1 \ldots r_{n-1}}_{\nu_1 \ldots \nu_{n-1}} = \frac{a^{r_n}_{\nu_n}}{D},$$

wobei D die Determinante der a^k_i ist. Es sei nun für eine bestimmte Permutation $r_1 \ldots r_{n-1}$ die Determinante $D'_{r_1 \ldots r_{n-1}} \neq 0$. Dann gibt es bei festen $r_1 \ldots r_{n-1}$ mindestens eine Permutation $\nu_1 \ldots \nu_{n-1}$, so daß $A^{r_1 \ldots r_{n-1}}_{\nu_1 \ldots \nu_{n-1}} \neq 0$ ist. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so müßte die r_n-te Zeile der De-

[33]) Eine Anleitung zum Beweis dieser bekannten Identität findet man bei CARTAN Leçons sur la géométrie des espaces de RIEMANN, Paris 1928, S. 8.

erminante $|a_i^k|$ verschwinden, was nicht möglich ist. Somit gibt es links n (21. 6) mindestens eine von Null verschiedene Determinante $D_{\nu_1 \dots \nu_{n-1}}$, vas zu beweisen war.

22. Als Oberflächeninhalt des Durchschnitts von $\mathfrak{R}_{n-1}^i$ mit π_τ unter Zugrundelegung der Metrik

$$ds^2 = \sum_1^n g_i^2 \, d\vartheta_i^2 \tag{22. 1}$$

efinieren wir den Ausdruck[34])

$$J_\tau = \int_{\pi_\tau}' \sqrt{g} \sqrt{\sum_{(\nu_1 \dots \nu_n)} (g^{\nu_n})^2 D_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{n-1}}^2} \, dt_{\nu_1} \dots dt_{\nu_{n-1}}, \tag{22. 2}$$

vobei die Summe über alle zyklischen Permutationen der Zahlen 1, 2, ..., n rstreckt wird und g^{ν_n} die reziproke Zahl von g_{ν_n} bedeutet. Die Integration st über die Projektion des Würfels π parallel zur Achse ϑ_{ν_n}' zu erstrecken. Nun liegt die Berandung jedes der Parallelotope π auf solchen $(n-1)$-dimenionalen Ebenen, welche $\mathfrak{R}_{n-1}^i$ nicht berühren. Der Schnitt von $\mathfrak{R}_{n-1}^i$ mit iner solchen Ebene besteht daher aus endlich vielen regulären $(n-2)$-imensionalen Mannigfaltigkeiten[35]) und läßt sich nach Erhard Schmidt[36]) urch endlich viele $(n-2)$-dimensionalen Grundgebilde überdecken, von enen jedes den $(n-1)$-dimensionale Oberflächeninhalt Null besitzt[37]). Daraus folgt, daß der $(n-1)$-dimensionale Oberflächeninhalt des Durchchnitts von $\mathfrak{R}_{n-1}^i$ mit der Gesamtheit der Berandungen aller Parallelotope π_τ leich Null ist. Es kommt also kein endlicher Teil des $(n-1)$-dimensionalen Oberflächeninhalts von $\mathfrak{R}_{n-1}$ mehrfach in Anschlag, und man kann für den lächeninhalt $O(\mathfrak{R}_{n-1}^i)$ von $\mathfrak{R}_{n-1}^i$ setzen:

$$O(\mathfrak{R}_{n-1}^i) = \sum_\tau \int_{\pi_\tau}' \sqrt{g} \sqrt{D_{\nu_n}} \, dt_{\nu_1} \dots dt_{\nu_{n-1}}.$$

$\sqrt{D_{\nu_n}}$ ist die lange Wurzel, die in (22. 2) eintritt. Hat man $O(\mathfrak{R}_{n-1}^i)$ definiert, o erfolgt die Definition der Oberfläche O von $\mathfrak{R}$ durch die Formel:

$$O = \sum_i O(\mathfrak{R}_{n-1}^i).$$

llgemeiner, falls $\Phi(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n)$ eine stetige Funktion von $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ ist, efinieren wir das Integral

$$J(\Phi) = \int \Phi \, dO,$$

---

[34]) Das ist das Integral über die Länge eines $(n-1)$-dimensionalen Multivektors it den Komponenten $d\vartheta_i$. Vgl. Cartan, l. c. S. 15. Analog definiert man die Oberäche für kleinere Dimensionen als $n-1$.

[35]) Vgl. Schmidt I, S. 749.

[36]) Vgl. Schmidt I, S. 749.

[37]) Vgl. Schmidt I, S. 713.

wobei dO das Oberflächenelement von $\mathfrak{K}$ ist, durch die Gleichung

$$J(\Phi) = \sum_i \int_{\mathfrak{K}_{n-1}^i} \Phi \, dO.$$

Jedes Integral der rechten Seite wird seinerseits durch die Gleichung

$$\int_{\mathfrak{K}_{n-1}^i} \Phi \, dO = \sum_\tau \int_{\pi_\tau'} \Phi \sqrt{g} \sqrt{D_{\nu_n}} \, dt_{\nu_1} \ldots dt_{\nu_{n-1}}$$

definiert. Dabei sind die ϑ_i in Φ Funktionen von t_k, welche mit diesen durch (21. 2) verbunden sind. Daß diese Integrale im RIEMANNschen Sinne existieren, ist leicht zu sehen und kann in der SCHMIDTschen Arbeit nachgelesen werden.

Wir fügen noch einige Tatsachen über die Normalen einer regulären Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_k$ hinzu. Wir betrachten einen inneren Punkt P von $\mathfrak{M}_k$ und ein ihn enthaltendes Grundgebilde G_k. Wird eine Umgebung von P durch

$$\vartheta_i = \vartheta_i(v_1, \ldots, v_k)$$

gegeben, wobei die v_i in einem Parallelotop

$$a_\varrho' \leqq v_\varrho \leqq a_\varrho'' \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, k)$$

variieren, so hat voraussetzungsgemäß die Funktionalmatrix

$$\left\{ \frac{\partial \vartheta_i}{\partial v_k} \right\} \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, k \end{matrix}$$

den Rang k. Das Gleichungssystem

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \vartheta_\nu}{\partial v_\lambda} \xi_\nu = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, k)$$

hat also in jedem Punkt den Rang $n - k$. Die entsprechenden geben dann die Normalrichtungen in dem betreffenden Punkt. Auf diese Weise (durch Überdeckung von $\mathfrak{M}_k$ durch endlich viele Grundgebilde) definieren wir die Normalschar in jedem Punkt P von $\mathfrak{M}_k$. Ist $k = n - 1$, so gibt es in jedem Punkt (auch Randpunkt[38]) eine wohlbestimmte Normale, welche sich mit dem Bezugspunkt stetig ändert. Nun sei zuerst $k = 1$. Dann gibt es in jedem Punkt eine wohlbestimmte Tangente und eine wohlbestimmte Normalenschar vom Range $(n - 1)$, welche die $(n - 1)$-dimensionale Normalebene bildet. Diese ändert sich stetig mit dem Bezugspunkte. In jedem Randpunkt von $\mathfrak{M}_1$, den wir als 0-dimensionale Mannigfaltigkeit ansehen, gibt es auch in bezug auf diese Randmannigfaltigkeit eine Normalenschar vom Range n

[38]) In den Randpunkten werden die $\frac{\partial \vartheta_i}{\partial t_k}$ durch Stetigkeit (von innen) definiert. Man kann noch annehmen, daß G_k in einem ihn enthaltenden Grundgebilde G_k' liegt, in dem noch die Gleichungen gelten.

elche aus allen Geraden durch diesen Punkt besteht. Analog verfahren wir r Bildung des vollständigen Normalsystems einer regulären Mannigfaltigeit $\mathfrak{M}_k$. In jedem Punkt von $\mathfrak{M}_k$ (auch in jedem Randpunkt) gibt es nämlich ne wohlbestimmte Normalenschar vom Range $(n-k)$. Diese ändert sich etig mit dem Bezugspunkte. Fügt man diesem System noch die vollständigen ormalsysteme der endlich vielen $(k-1)$-dimensionalen Randmannigltigkeiten von $\mathfrak{M}_k$ hinzu, so erhält man das vollständige Normalsystem on $\mathfrak{M}_k$.

23. Was nun einen n-dimensionalen regulären Körper $\mathfrak{K}$ betrifft, so finieren wir als vollständiges Normalsystem von $\mathfrak{K}$ die Gesamtheit der vollständigen Normalsysteme seiner endlich vielen $(n-1)$-dimensionalen Randannigfaltigkeiten $\mathfrak{R}_{n-1}^{(i)}$. Was die Normalrichtung der äußeren Normalen on $\mathfrak{K}$ anbetrifft, so definieren wir für jedes $\mathfrak{R}_{n-1}^{i}$ (auch in den Randunkten) die Richtungskosinus $\cos(n, \vartheta_i)$ in Einklang mit dem euklidihen Fall durch

$$\text{23. 1)} \qquad \cos(n, \vartheta_{\nu_n}) = \frac{g_{\nu_1} \cdots g_{\nu_{n-1}} D_{\nu_1 \dots \nu_{n-1}}}{\sqrt{\sum_{(\nu_1 \dots \nu_{n-1})} (g_{\nu_1} \cdots g_{\nu_{n-1}})^2 D^2_{\nu_1 \dots \nu_{n-1}}}},$$

obei $\nu_1 \dots \nu_{n-1}$ eine zyklische Permutation der Zahlen $1, 2, \dots n$ bedeuten[39]). egen $g_{\nu_1} \dots g_{\nu_n} = g$ kann man noch schreiben

$$\text{23. 2)} \qquad \Phi_i = g_{\nu_n} \cos(n, \vartheta_n) = \frac{D_{\nu_1 \dots \nu_{n-1}}}{\sqrt{\sum_{(\nu_1 \dots \nu_{n-1})} g^{\nu_n} D^2_{\nu_1 \dots \nu_{n-1}}}}$$

nd die Φ_i die kovarianten Komponenten der äußeren Normale n nennen.

A priori ist es natürlich nicht einleuchtend (und nicht richtig), daß (23. 1) e Richtungen der äußeren Normale n von $\mathfrak{K}$ geben. Es ist aber immer öglich, eventuell durch Umbenennung der $t_1, \dots, t_{n-1}$ diese Tatsache in nem Punkt zu erreichen. Nachdem dies geschehen, gilt die Tatsache in dem Punkt von π_τ, wenn man dafür Sorge trägt, diese Würfel π_τ so klein wählen, daß (im Falle einer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{R}_{n-1}^{i}$) mindestens eine Determinante $D_{\nu_1 \dots \nu_k}$ in (dem abgeschlossenen) Parallelotop nicht verschwindet. n folgenden wird diese Umbenennung als vollzogen vorausgesetzt, so daß 3. 1) die Richtungen der äußeren Normalen von $\mathfrak{K}$ darstellen werden.

Somit sind wir mit allen vorbereitenden Tatsachen über den Körpergriff fertig und können zum Beweis des Gauss schen Satzes übergehen.

---

[39]) Analog drücken sich die Richtungskosinus der Normalenscharen im Falle er regulären Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_k$ mit aus. Wir bedürfen aber dieser Tatsache cht, da diese Mannigfaltigkeiten von kleineren Dimensionen als $n-1$ bilden.

Fortsetzung. Beweis des Gaussschen Satzes im Riemannschen Raum für die regulären Körper.

24. Der Beweis des Gaussschen Divergenzsatzes (17. 2) kann wege $d\tau = \sqrt{g}\, d\vartheta_1 \ldots d\vartheta_n$ unmittelbar aus dem sogenannten Greenschen Lemm geschlossen werden, das für die i-te Kordinate durch folgende Gleichun Ausdruck findet:

$$\int_{\mathfrak{K}} \frac{\partial F}{\partial \vartheta_i}\, d\vartheta_1 \ldots d\vartheta_n = \int_{O} F \Phi_i dO. \tag{24. 1}$$

Der Gausssche Satz ergibt sich dann durch Summation über alle i. Wa die Definition der rechten Seite anbelangt, so ist diese durch die Summe de entsprechenden Integrale über die endlich vielen regulären $(n-1)$ dimensionalen Mannigfaltigkeiten definiert, nämlich durch

$$\int_{O} F \Phi_i dO = \sum_{\lambda} \int_{\mathfrak{K}_{n-1}^{\lambda}} F \Phi_i dO.$$

Zum Beweis von (24. 1) bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}'$ die Projektion von $\mathfrak{K}$ auf di Ebene $\vartheta_i = 0$. Es ist hier keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn de Index i gleich n angenommen wird. Wir verstehen also unter $\mathfrak{K}'$ die Punkt menge $P(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}, 0)$, wobei $P(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n)$ den ganzen Körper durchläuft.

Es bezeichne jetzt $\mathfrak{K}_1'$ folgende Teilmenge von $\mathfrak{K}'$: Jede zur ϑ_n-Achs parallele Gerade in G_0 (im euklidischen Sinne), welche durch einen Punkt vo G_0 geht, schneidet den Rand von $\mathfrak{K}$ in unendlich vielen Punkten. Zu dies Menge $\mathfrak{K}_1'$ zählen wir die Teilmenge $\mathfrak{K}_2'$ von $\mathfrak{K}'$, die aus allen Punkten von besteht, welche Projektion von Randpunkten einer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{K}_{n-1}^{i}$ sind. Die Summe $\mathfrak{K}_1' + \mathfrak{K}_2'$ bezeichnen wir im folgenden mit $\mathfrak{K}_0'$. Die Punktmenge hat einen $(n-1)$-dimensionalen Jordan-Inhalt Null. Um di zu beweisen, bemerken wir, daß $\mathfrak{K}_1'$ in der Projektion der Punktmenge enthalten ist, welche die Projektionen aller Punkte von $\mathfrak{K}$ enthält, in welche die Normale senkrecht zur ϑ_n-Achse steht, also die Projektion aller Punkt in denen die Funktionaldeterminante

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \vartheta_{n-1}}{\partial t_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \vartheta_1}{\partial t_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial \vartheta_{n-1}}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix}$$

verschwindet. Die Projektion dieser Punktmenge hat aber den $(n-$ dimensionalen Jordanschen Inhalt Null, wie dies leicht aus einem bekannt

atz folgt. Daß der Inhalt von $\mathfrak{K}_2'$ ebenso Null ist, ist trivial. Wir geben ier keinen ausführlichen Beweis dieser Tatsachen, da der Leser ihn in aller usführlichkeit in der SCHMIDTschen Arbeit nachlesen kann[40]).

25. Wir führen jetzt eine netzartige Einteilung von G_0 in Würfeln ein, der besser gesagt, eines Würfels W von G_0, der $\mathfrak{K}$ enthält, etwa von

$$-2a \leqq \vartheta_i \leqq 2a \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Vir zerlegen W durch zu den Koordinatenachsen parallele Ebenen

$$\vartheta_i = m\frac{a}{N} = m\delta \quad (i = 1, 2, \ldots, n,\ N \text{ ganz},\ m = -N, \ldots, 0, \ldots N)$$

n kongruente abgeschlossene Würfel W_δ und bezeichnen eine solche Ein- eilung als ein Netz $\mathfrak{N}_\delta$. Das entsprechende Netz von $\vartheta_n = 0$ (die Projektion on $\mathfrak{N}_\delta$ auf $\vartheta_n = 0$) bezeichnen wir mit $\mathfrak{N}_\delta'$.

Wir betrachten jetzt bei einem vorgelegten Netz $\mathfrak{N}_\delta$ diejenige Würfel- enge $\mathfrak{W}_\delta$, die aus allen Würfeln W_δ von $\mathfrak{N}_\delta$ besteht, die entweder im Innern der auf dem Rande Randpunkte von $\mathfrak{K}$ enthalten, deren Projektion der Menge $\mathfrak{K}_0'$ angehört. Diese Menge erweitern wir folgendermaßen zu einer Menge $\mathfrak{W}_\delta^*$: Ist W_δ ein Würfel von $\mathfrak{W}_\delta$, so rechnen wir zu $\mathfrak{W}_\delta^*$ alle Würfel W_δ^* on $\mathfrak{N}_\delta$, deren Projektion $W_\delta'^*$ auf $\vartheta_n = 0$ mit der Projektion dieses Würfels uf dieselbe Ebene übereinstimmt. $\mathfrak{W}_\delta^*$ ist also eine Punktmenge, welche aus Säulen" parallel zur ϑ_n-Achse besteht.

Wir beweisen jetzt:

Der n-dimensionale[41]) Inhalt von $\mathfrak{W}_\delta^*$ ist Null.

Die Behauptung ist trivial. Denn bezeichnet $J_{n-1}(\mathfrak{W}_\delta')$ das $(n-1)$- imensionale Maß von $\mathfrak{W}_\delta'$, so gilt für den n-dimensionalen Inhalt von $\mathfrak{W}_\delta^*$

$$J_n(\mathfrak{W}_\delta^*) \leqq a \cdot J_{n-1}(\mathfrak{W}_\delta')$$

nd die rechte Seite kann bei genügend feiner Unterteilung beliebig klein emacht werden.

Wir bezeichnen jetzt (bei einer Unterteilung δ) mit $\mathfrak{K}_\delta$ die Menge aller unkte von $\mathfrak{K}$, die keinem der abgeschlossenen Würfel der Menge $\mathfrak{W}_\delta^*$ an- ehören, und mit $\overline{\mathfrak{K}_\delta}$ die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{K}_\delta$. Nach dem früher

[40]) Vgl. z. B. SCHMIDT I, l. c. S. 712. Ebenfalls O. HAUPT. Differential- und tegralrechnung. Berlin 1938. Bd. 3. In diesem letzteren Werk wird das LEBESGUE- he Integral zugrunde gelegt.

[41]) Es handelt sich immer um JORDANschen Inhalt.

Gesagten enthält $\overline{\mathfrak{R}}_\delta$ keine Punkte, deren Projektion $\mathfrak{R}'_\delta$ angehört. Setzt man dann

$$J_\delta = \int\limits_{\overline{\mathfrak{R}}_\delta} \frac{\partial F}{\partial \vartheta_n} d\vartheta_1 \dots d\vartheta_n,$$

so gilt nach bekannten Sätzen der Riemannschen Integrationstheorie

$$\lim_{\delta \to 0} J_\delta = \lim_{\delta \to 0} \int\limits_{\overline{\mathfrak{R}}_\delta} \frac{\partial F}{\partial \vartheta_n} d\vartheta_1 \dots d\vartheta_n = \int\limits_{\overline{\mathfrak{R}}} \frac{\partial F}{\partial \vartheta_n} d\vartheta_1 \dots d\vartheta_n = J.$$

Fortsetzung und Ende des Beweises des Greenschen Lemmas. Beweis des wichtigen Hilfssatzes von Nr. 8.

26. Nun sei $\overline{O}_\delta$ derjenige Teil der Oberfläche von $\mathfrak{R}$, der $\mathfrak{R}_\delta$ angehört. Da (nach Ausschluß von $\mathfrak{M}^*_\delta$) jede durch einen Punkt P' von $\mathfrak{R}'$ gehende und zu der ϑ_n-Achse parallele Gerade $\overline{\mathfrak{O}}_\delta$ in endlich vielen Punkten trifft, so gilt, wenn man die Entwicklungen von Nr. 23 berücksichtigt,

$$J_\delta = \int\limits_{\overline{\mathfrak{O}}_\delta} F \Phi_n \, dO.$$

Wir brauchen also zum Beweis des Greenschen Lemmas nur die Gleichung

$$\lim_{\delta \to 0} Q_\delta = \lim_{\delta \to 0} \int\limits_{\overline{\mathfrak{O}}_\delta} F \Phi_n \, dO = \int\limits_{\overline{\mathfrak{O}}} F \Phi_n \, dO = Q \tag{26.1}$$

zu beweisen.

Nun ist die Differenz $Q - Q_\delta$ gleich

$$Q - Q_\delta = \sum_{W_\delta} \int F \Phi_n \, dO, \tag{26.2}$$

wobei die Summation über alle Würfel W_δ von $\mathfrak{N}_\delta$ erstreckt wird, die überhaupt Punkte enthalten, deren Projektion in $\mathfrak{R}'_0$ oder dessen Rand fällt.

Jetzt fassen wir eine bestimmte Mannigfaltigkeit $\mathfrak{R}^i_{n-1}$ ins Auge und alle Parallelotope π_τ, die Punkte dieser Mannigfaltigkeit enthalten. Wir geben noch eine Zahl $\varepsilon > 0$ vor und fassen das Integral

$$Q_i = \sum_\tau \int\limits_{\mathfrak{R}^i_{n-1}} F \Phi_n \, dO = \int\limits_{\mathfrak{R}^i_{n-1}} F \Phi_n \, dO$$

als Lebesguesches Integral auf. Bedeutet dann $\mathfrak{R}'^{\,i}_{n-1}$ die Mannigfaltigkeit, auf der $|\Phi_n| \leqq \varepsilon$ ist, und $\mathfrak{R}^{*\,i}_{n-1}$ die Differenz $\mathfrak{R}^i_{n-1} - \mathfrak{R}'^{\,i}_{n-1}$, so ist

$$Q_i = \int\limits_{\mathfrak{R}'^{\,i}_{n-1}} F \Phi_n \, dO + \int\limits_{\mathfrak{R}^{*\,i}_{n-1}} F \Phi_n \, dO = Q'_i + Q^*_i. \tag{26.3}$$

un behaupten wir: Es sei P' ein Punkt von $\vartheta_n = 0$. Bedeutet dann $A_i(P')$ e Anzahl der Schnittpunkte der durch P' gehenden zur ϑ_n-Achse parallelen eraden mit der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{R}^{*\,i}_{n-1}$, so ist das Maximum A_i von $A_i(P')$, ls P' die Ebene $\vartheta_n = 0$ durchläuft, eine endliche Zahl. Wäre dies nämlich cht der Fall, so müßte es, da $\mathfrak{R}^{*\,i}_{n-1}$ abgeschlossen ist, mindestens einen nkt P^* auf dieser geben, der die Eigenschaft besitzt, daß die Parallele rch ihn zur ϑ_n-Achse die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{R}^{i\,*}_{n-1}$ berührt. Hiermit müßte P^*. $\Phi_n = 0$ sein, was der Annahme widerspricht. Wir können also (da es dlich viele $\mathfrak{R}^i_{n-1}$ gibt) sagen: Nach Entfernung desjenigen Teiles von O, r welchen $|\Phi_n| \leqq \varepsilon$ ist[42]), hat der Rest O^* von O die Eigenschaft, daß jede der ϑ_n-Achse parallelen Geraden durch einen Punkt der Projektion $\mathfrak{R}'$ von höchstens in endlich vielen Punkten A trifft.

Wir betrachten jetzt das Integral $Q = \Sigma Q_i$ und zerlegen jedes Q_i ch (26. 3) in zwei Integrale Q'_i bzw. Q^*_i. Eine leichte Überlegung zeigt, ß $\Sigma |Q'_i| \leqq \varepsilon O$ ist und die Summe $\Sigma |Q^*_i|$ kleiner als die Größe $AJ_{n-1}(\mathfrak{M}'_\delta) : \varepsilon$. Wir erhalten dann als endgültige Abschätzung die Unleichung

$$|Q - Q_\delta| \leqq \varepsilon Q + MA \frac{J_{n-1}(\mathfrak{M}'_\delta)}{\varepsilon}.$$

abei ist $J_{n-1}(\mathfrak{M}'_\delta)$ der Gesamtinhalt der $(n-1)$-dimensionalen Würfel n $\mathfrak{R}'_\delta$, die die Menge $\mathfrak{R}'_0$ überdecken. Lassen wir nun bei konstantem ε so klein werden, daß $J_{n-1}(\mathfrak{M}'_\delta) \leqq \varepsilon^2$ wird, so erhält man

$$|Q - Q_\delta| \leqq \varepsilon O + MA\,\varepsilon,$$

as die Gleichung

$$\lim_{\delta \to 0} Q_\delta = Q,$$

h. (10. 3) zur Folge hat. Somit ist das Greensche Lemma bewiesen.

27. Wir sind nun imstande, auf Grund von (17. 2) die Behauptung (17. 1) beweisen. Wegen

$$ds^2 = \sum_1^n g_i^2\, d\vartheta_i^2$$

$$g_1 = 1, \quad g_i = \varphi(\vartheta_1)\,\varphi(\vartheta_2) \ldots \varphi(\vartheta_{n-1}) \qquad (i = 2, 3, \ldots, n),$$

hier

$$\sqrt{g} = \bar{g} = \varphi^{n-1}(\vartheta_1)\,\varphi^{n-2}(\vartheta_2) \ldots \varphi(\vartheta_{n-1})$$

[42]) Wir haben schon früher betont, daß es auch in jedem Randpunkte eine wohlstimmte Normale gibt. Das vollständige Normalensystem von Erhard Schmidt rden wir hier nicht gebrauchen. Es kann natürlich vorkommen, daß Punkten von $_{-1}$, welche gemeinsame Randpunkte zweier oder mehrerer $\mathfrak{R}_{n-1}$ sind, zwei oder hrere Normalen zugeordnet werden, welche eben von diesen $\mathfrak{R}_{n-1}$ herrühren. Bei r Herausnahme des betreffenden Teiles von O wird jede Normale in Betracht gezogen.

und, wie man sich leicht überzeugt,

$$\cos(n, \vartheta_i) = \frac{\Phi_i}{g_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n$$

Hiermit ist (17.1), wenn man

$$a^i = \frac{\omega(\vartheta_i)}{\psi^{n-1}(u)\, g_i^2} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),\ a^n = 0$$

setzt, mit der Behauptung

$$\sum_1^{n-1} \int_{\mathfrak{K}} \frac{1}{\bar{g}} \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} \left(\frac{\bar{g}\, \omega(\vartheta_i)}{g_i^2\, \psi^{n-1}(u)} \right) d\tau = 0$$

gleichbedeutend, und es genügt nachzuweisen, daß hier der Ausdruck

$$D = \frac{1}{\bar{g}} \sum_1^{n-1} \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} \left(\frac{\bar{g}\, \omega(\vartheta_i)}{g_i^2\, \psi^{n-1}(u)} \right)$$

identisch verschwindet.

Nun gilt für D

$$D = \frac{1}{\psi^{n-1}(u)} \cdot \frac{1}{\bar{g}} \sum_1^{n-1} \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} \left(\frac{\bar{g}\, \omega(\vartheta_i)}{g_i^2} \right) + \frac{1}{\bar{g}} \sum_1^{n-1} \frac{\bar{g}\, \omega(\vartheta_i)}{g_i^2} \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{\psi^{n-1}(u)} \right)}{\partial \vartheta_i}$$

Für die erste Summe rechts kann man leicht [43]) die Gleichung

$$\frac{1}{\bar{g}} \sum_1^{n-1} \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} \left(\frac{\bar{g}\, \omega(\vartheta_i)}{g_i^2} \right) = n - 1$$

beweisen. Es wird also

$$D = \frac{(n-1)}{\psi^{n-1}(u)} + \sum_1^{n-1} \frac{\omega(\vartheta_i)}{g_i^2} \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{\psi^{n-1}(u)} \right)}{\partial \vartheta_i}.$$

Nun folgt aus der Definition von

$$\sqrt{K}\, \psi(u) = \sqrt{1 - \prod_1^{n-1} \varphi^2(\vartheta_i)},$$

es ist also

$$\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta_i} = \frac{\varphi^2(u)\, \psi(\vartheta_i)}{\varphi(\vartheta_i)\, \psi(u)} = \frac{\varphi(u)\, \omega(\vartheta_i)}{\omega(u)}.$$

Hiermit wird

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{\psi^{n-1}(u)} \right)}{\partial \vartheta_i} = -(n-1) \frac{1}{\psi_n(u)} \frac{\varphi(u)\, \omega(\vartheta_i)}{\omega(u)}.$$

[43]) Für einen ausführlichen Beweis vgl. man meine unter Fußnote 6 zitierte Arbeit, S. 715.

urch Einsetzen folgt nun

$$D = \frac{n-1}{\psi^{n-1}(u)} - (n-1)\frac{1}{\psi^{n-1}(u)\,\omega^2(u)}\sum_1^{n-1}\left\{\frac{\omega^2(\vartheta_i)}{g_i^2}\right\}.$$

t jetzt die Identität

$$\sum_1^{n-1}\frac{\omega^2(\vartheta_i)}{g_i^2} = \omega^2(u)$$

ar leicht bewiesen werden kann, so folgt hieraus $D = 0$ und somit ist auch r Beweis unseres Hilfssatzes erbracht.

Kapitel IV.

Die fundamentale isoperimetrische Gleichung. Die Aufgabe von Darboux-Schmidt. Eindeutigkeitsfragen.

Die fundamentale isoperimetrische Gleichung.

28. Wir sind jetzt imstande, die in Nr. 7 aufgestellte isoperimetrische eichung (7. 1) zu beweisen. Dazu betrachten wir einen beliebigen zulässigen örper $\mathfrak{K}$ und denken uns seine Oberfläche O durch die in der Einleitung erhnte Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ in zwei Teile O_1 bzw. O_2 zerlegt. O_1 sei die obere, die untere Hälfte.

Wir ordnen jetzt jedem Punkt $P(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n)$ von O_1 denjenigen Punkt $(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}, \vartheta_n')$ der oberen Hälfte O_{g_1} eines Extremalkörpers $\mathfrak{K}_g$ zu, in dem durch P gehende Parameterlinie ϑ_n $\mathfrak{K}_g$ schneidet. Ähnlich ordnen wir dem Punkt $P_2(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n)$ von O_2 denjenigen Punkt $P_2(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}, \vartheta_n'')$ r unteren Hälfte O_{g_2} von $\mathfrak{K}_g$ zu, in dem die durch P_2 gehende Parameterie ϑ_n O_{g_2} schneidet. P_1 bzw. P_2 haben dieselben $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}$-Koordinaten e P_1, P_2. Ihre ϑ_n-Koordinaten werden durch die Gleichungen

$$\vartheta_n' + \int_u^b \frac{K_g \Phi_g\, dx}{\varphi\sqrt{1 - K_g^2 \Phi_g^2}} = 0, \qquad \vartheta_n'' + \int_u^b \frac{k_g \Phi_g\, dx}{\varphi\sqrt{1 - k_g^2 \Phi_g^2}} = 0$$

geben, wobei u durch

$$\varphi(u) = \prod_{\nu=1}^{n-1}\varphi(\vartheta_\nu)$$

geben wird. Wir schreiben im folgenden der Kürze wegen an Stelle der eichungen (28. 1) einfach

$$\vartheta_n' + F_g(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}) = 0, \quad \vartheta_n'' - F_g(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}) = 0.$$

Die oben erklärte Zuordnung ist natürlich nicht eindeutig, jedoch entspric jedem P_1 (bzw. P_2) ein bestimmter Punkt $\bar{P}_1$ (bzw. $\bar{P}_2$). Wir definieren jet zwischen den äußeren Normalen n von P_1 und $\bar{n}$ von $\bar{P}_1$ einen Winkel $(n, \bar{n}$ Dazu betrachten wir die Flächenschar

$$\vartheta_n' + F_g(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}) = c \tag{28.2}$$

und wählen die Konstante c so, daß die entsprechende Fläche (28. 2) dur den Punkt P_1 geht. In dieser gemeinsamen Lage bilden n bzw. $\bar{n}$ einen Winke den wir im folgenden mit $(n, \bar{n})$ bezeichnen werden. Entsprechend wi $(n, \bar{n})$ definiert, wenn es sich um einen Punkt P_2 mit seinem zugeordneten $\bar{P}$ handelt. Um die isoperimetrische Gleichung (15. 1) zu erhalten, gehen w vom Integral

$$\int \cos(n, \bar{n})\, dO \tag{28.3}$$

aus, erstreckt über die Gesamtoberfläche $\mathfrak{O}$ von $\mathfrak{K}$ und entwickeln $\cos(n,$ durch die Formel

$$\cos(n, \bar{n}) = \sum_1^n \cos(n, \vartheta_\nu) \cos(\bar{n}, \vartheta_\nu).$$

Mittels (16. 4) wird nun

$$\cos(n, \bar{n}) = k_g \sum_1^{n-1} \frac{\cos(n, \vartheta_\nu)}{g_\nu} \left(\omega(\vartheta_\nu) + A_g \frac{\omega(\vartheta_\nu)}{\psi^{n-1}(u)} \right) \pm \pm k_g \cos(n, \vartheta_\nu) \sqrt{1 - k_g^2 \Phi_g^2(u)}. \tag{28.4}$$

Hier entspricht das Pluszeichen den Punkten P_1 und das Minuszeichen de Punkten P_2. Da jetzt nach dem vorhin bewiesenen Hilfssatz

$$\sum_1^{n-1} \int_{\mathfrak{O}} \frac{\omega(\vartheta_\nu)}{\psi^{n-1}(u)} \frac{\cos(n, \vartheta_\nu)}{g_\nu}\, dO = 0,$$

und nach dem Gaussschen Divergenzsatz

$$\sum_1^{n-1} \int_{\mathfrak{O}} \omega(\vartheta_\nu) \cos(n, \vartheta_\nu)\, dO = \int_{\mathfrak{K}} \sum_1^{n-1} \left\{ \frac{1}{\bar{g}} \frac{\partial}{\partial \vartheta_\nu} \left(\bar{g} \frac{\omega}{g_\nu^2} \right) \right\} d\tau$$

ist, so folgt mit Rücksicht auf (28. 3), (28. 4) und

$$\frac{1}{\bar{g}} \sum_1^{n-1} \frac{\partial}{\partial \vartheta_\nu} \left(\bar{g} \frac{\omega(\vartheta_\nu)}{g_\nu^2} \right) = n - 1$$ [44]),

[44]) Einen ausführlichen Beweis dieser Identität kann man in meiner Arbei Zum isoperimetrischen Problem für die nichteuklidischen Geometrien, Math. Ann. 11 (1943), S. 636—686 nachlesen.

Gleichung

$$\varrho_g \int \cos(n, \bar{n})\, dO = (n-1)V \pm \int \sqrt{\varrho_g^2 - \Phi_g^2(u)}\, \cos(n, \vartheta_\nu)\, dO. \tag{5.5}$$

bei ist V das Volumen (jedesmal in der entsprechenden Metrik) des zusigen regulären Körpers $\mathfrak{K}$. Das Pluszeichen entspricht hier dem oberen il O_1 von O und das Minuszeichen dem unteren Teil O_2. Wir werden alsbald gen: Das letzte Integral J in (28.5) ist vom Körper $\mathfrak{K}$ unabhängig, und gilt

$$J = 2\int_a^b \sqrt{\varrho_g^2 - \Phi_g^2(u)}\, \psi^{n-1}(u)\, du. \tag{8.6}$$

Fortsetzung.

eweis von (28.4) und der fundamentalen isoperimetrischen Gleichung.

29. Zum Beweis von (28.6) verfahren wir wie beim Beweis des GREENschen mmas. Es sei $\mathfrak{K}'$ die „Projektion" von $\mathfrak{K}$ in der ϑ_n-Richtung auf $\vartheta_n = 0$. ist Jordan meßbar und möge in einem $(n-1)$-dimensionalen Würfel W' gen.

Wir betrachten wie beim Beweis des GREENschen Lemmas ein Netz $\mathfrak{N}_\delta$, ssen Würfel eine Kantenlänge δ besitzen[45]). Wir bezeichnen ferner durch $\mathfrak{K}_0'$ e Menge der Punkte P', welche entweder Projektion von Randpunkten von ilmannigfaltigkeiten oder solchen Punkten sind, welche die Eigenschaft ben, daß jede Linie ϑ_n durch die Oberfläche $\mathfrak{O}$ in unendlich vielen Punkten fft. Es sei nun $\mathfrak{W}_\delta$ die Würfelmenge des Netzes $\mathfrak{N}_\delta$, deren Projektion keine nkte von $\mathfrak{K}_0'$ enthält, und $\overline{\mathfrak{W}}_\delta$ die übrige Würfelmenge, die überhaupt nkte von $\mathfrak{K}$ enthält. Ist $\overline{\mathfrak{O}}_\delta$ der in $\overline{\mathfrak{W}}_\delta$ liegende Teil von $\mathfrak{O}$, so ist, da der tegrand $\sqrt{\varrho_g^2 - \Phi_g^2(u)}$ nur von $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}$ und nicht von ϑ_n abhängt,

$$\pm \int_{\overline{\mathfrak{O}}_\delta} \sqrt{\varrho_g^2 - \Phi_g^2(u)}\, \cos(n, \vartheta_n)\, dO = 2\int \sqrt{\varrho_g^2 - \Phi_g^2(u)}\, d\tau_1, \tag{9.1}$$

bei

$$d\tau_1 = g_1 \ldots g_{n-1}\, d\vartheta_1 \ldots d\vartheta_{n-1} = \sqrt{g^*}\, d\vartheta_1 \ldots d\vartheta_{n-1}$$

ich dem Volumenelement von $\vartheta_n = 0$ bedeutet. Nun kann man genau wie

[45]) Hier spielt sich alles in G_0 ab. Man kann, wenn man will, euklidische Länge v. Inhalte betrachten. Das Ergebnis ist dasselbe, da W' ganz in G_0 liegt und $\sqrt{g}$ in W' h oben bzw. nach unten (durch endliche von 0 verschiedene Zahlen) begrenzt ist. ange es sich hier um Nullmenge handelt, legen wir (der Einfachheit wegen) euklidische trik zugrunde.

beim Beweis des GREENschen Lemmas zeigen, daß bei abnehmendem δ da Integral

$$\pm \int_{\mathfrak{O}_\delta} \sqrt{\varrho_g^2 - \Phi_g^2(u)} \cos(n, \vartheta_n)\, dO$$

gegen das Integral

$$\pm \int_{\mathfrak{O}} \sqrt{\varrho_g^2 - \Phi_g^2(u)} \cos(n, \vartheta_n)\, dO$$

konvergiert, und da $\mathfrak{R}_0'$ eine Nullmenge ist, so wird

$$\pm \int_{\mathfrak{O}} \sqrt{\varrho_g^2 - \Phi_g^2(u)} \cos(n, \vartheta_n)\, dO = 2 \int_{\mathfrak{R}'} \sqrt{\varrho_g^2 - \Phi_g^2(u)}\, d\tau_1. \tag{29.2}$$

$\mathfrak{R}'$ stellt hier den $(n-1)$-dimensionalen Bereich

$$\vartheta_n = 0, \quad \frac{\varphi(b)}{K} \leqq \frac{\varphi(u)}{K} \leqq \frac{\varphi(a)}{K}$$

dar.

30. Bei der Umformung des Integrals (29.2) können wir jetzt so wei gehen, daß dieses durch ein einfaches Integral ausgedrückt wird. Daz setzen wir

$$J(\varrho) = \int_{G_\varrho'} \sqrt{\varrho_g^2 - \Phi_g^2(u)}\, d\tau_1,$$

wobei G_ϱ' das Gebiet

$$\frac{\varphi(b)}{K} \leqq \frac{\varphi(u)}{K} \leqq \frac{\varphi(a)}{K}$$

mit $a \leqq \varrho < b$ darstellt. Dann folgt daraus durch Differentiation nac

$$J'(\varrho) = \sqrt{\varrho_g^2 - \Phi_g^2(\varrho)} \int \sqrt{g^*}\, d\vartheta_1 \ldots d\vartheta_{n-1},$$

wobei $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}$ durch die Beziehung $\prod_1^{n-1} \varphi(\vartheta_\nu) = \varphi(\varrho)$ verbunden sind

Durch eine Umformung, die ich in meiner vorhin zitierten Arbei ausführlich durchgeführt habe [46]), ist das letzte Integral hier gleich $\psi^{n-2}(\varrho$ und wir erhalten

$$\pm \int \sqrt{\varrho_g^2 - \Phi_g^2(u)} \cos(n, \vartheta_n)\, dO = 2 \int_a^b \sqrt{\varrho_g^2 - \Phi_g^2(u)}\ \psi^{n-2}(u)\, du.$$

Die isoperimetrische Gleichung lautet dann, wenn man diese letzte Gleichun berücksichtigt:

$$\boxed{\varrho_g \int_{\mathfrak{O}} \cos(n, \bar{n})\, dO = (n-1)V + 2 \int_a^b \sqrt{\varrho_g^2 - \Phi_g^2(u)}\ \psi^{n-2}(u)\, du}.$$

Diese ist die für das Folgende fundamentale isoperimetrische Gleichung.

[46]) l. c., Fußnote 2, S. 723.

Setzt man hier speziell $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_g$, so wird wegen $(n, \bar{n}) = 0$

$$\varrho_g O_g = (n-1)\, V + 2 \int_a^b \sqrt{\varrho_g^2 - \Phi_g^2(u)}\; \psi^{n-2}(u)\, du,$$

nd es folgt durch Subtraktion, nach vorheriger Zerlegung von $\cos(n, \bar{n})$ in $-2\sin^2\frac{(n,\bar{n})}{2}$ die Gleichung

(0. 1) $$\boxed{(n-1)\,(V - V_g) = \varrho_g (O - O_g) - 2\,\varrho_g\, R(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}_g)}.$$

iese bildet das zentrale Ergebnis der vorliegenden Abhandlung. Sie gilt ir alle vier hier betrachteten Geometrien und für jeden der vorhin betrachteten Extremalkörper $\mathfrak{K}_g$. Die eintretenden Größen sind die Volumen V zw. V_g von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_g$ und die Oberflächen O bzw. O_g derselben. Ferner edeutet $R(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}_g)$ das Restglied

$$R(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}_g) = \int \sin^2 \frac{(n, \bar{n})}{2}\, dO.$$

Vie aus der Definition dieses Restgliedes R hervorgeht, wird $R = 0$ dann nd nur dann), wenn $(n, \bar{n}) = 0$ wird, also (wegen der über $\mathfrak{K}$ gemachten oraussetzungen), wenn $\mathfrak{O}, \mathfrak{O}_g$ kongruent ist. Es bleibt also, um den Hauptsatz ollständig zu beweisen, zu zeigen, daß man zu jedem O_g einen (und nur einen) xtremalkörper $\mathfrak{K}_g$ konstruieren kann, der je nach der Größe von O_g zu einer er drei vorhin angegebenen Klassen gehört. Es ist daher nötig, die Ausrücke zu untersuchen, welche die Oberfläche eines Extremalkörpers geben.

Bevor wir zur Beantwortung dieser Frage übergehen, wollen wir das der Einleitung gestellte Problem III, das wir als Aufgabe von Darboux-chmidt bezeichnen werden, nach den vorherigen Methoden behandeln.

Die Aufgabe von Darboux-Schmidt.

31. Wir formulieren jetzt die in der Einleitung erwähnte Aufgabe von arboux-Schmidt in den Koordinaten $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$: Es bezeichne $\mathfrak{H}_{ab}$ den „Halbzylinder“

$$\frac{\varphi(b)}{K} \leqq \frac{\prod_1^{n-1} \varphi(\vartheta_\nu)}{K} \leqq \frac{\varphi(a)}{K}, \qquad \vartheta_n \geqq 0$$

es Fundamentalbereiches G_0. Es soll unter allen $(n-1)$-dimensionalen lächenstücken $\mathfrak{F}$ gegebener Oberfläche O die in $\mathfrak{H}_{ab}$ liegen, und welche durch ie Mannigfaltigkeiten [47])

$$\prod_1^{n-1} \varphi(\vartheta_\nu) = \varphi(a),\ \vartheta_n = 0, \qquad \prod_1^{n-1} \varphi(\vartheta_\nu) = \varphi(b),\ \vartheta_n = 0$$

[47]) Für $K = 0$ gilt die Bemerkung der Fußnote 11.

gehen, dasjenige bestimmt werden, welches zusammen mit der Fläche $\vartheta_n = 0$ das maximale Volumen einschließt. Es ist leicht zu zeigen, daß die Lösung dieser Aufgabe eine unmittelbare Folgerung der Lösung der SCHMIDTschen Aufgabe ist.

Denken wir uns mittels der Transformation $\vartheta_n' = -\vartheta_n$ an der Hyperebene $\vartheta_n = 0$ gespiegelt, so entsteht dadurch ein in bezug auf $\vartheta_n = 0$ symmetrischer Körper $\mathfrak{K}$, dessen Oberfläche das Doppelte der Oberfläche $O(\mathfrak{F})$ und dessen Volumen gleich dem Doppelten des von $\mathfrak{F}$ und der Ebene $\vartheta_n = 0$ eingeschlossenen Volumens ist. Betrachtet man nun neben $\mathfrak{K}$ noch einen Extremalkörper $\mathfrak{K}_g$, der symmetrisch zu $\vartheta_n = 0$ liegt, so erhält man, wenn man das ganze Verfahren der vorigen Nummern auf die beiden Körper anwendet, die isoperimetrische Gleichung

$$(31.1) \qquad (n-1)\{V(\mathfrak{F}) - V(\mathfrak{F}_g)\} = \varrho_g\{O(\mathfrak{F}) - O(\mathfrak{F}_g)\} - 2\,\varrho_g(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}_g).$$

Dabei sind $V(\mathfrak{F})$ bzw. $O(\mathfrak{F}_g)$ die von dem Flächenstück $\mathfrak{F}$ der oberen Hälfte[48]) $\mathfrak{F}_g$ und der Hyperebene $\vartheta_n = 0$ eingeschlossenen Volumina, $O(\mathfrak{F})$, $O(\mathfrak{F}_g)$ die entsprechenden Oberflächeninhalte und $R(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}_g)$ das mittels $\mathfrak{F}$ bzw. $\mathfrak{F}_g$ konstruierte Restglied, welches genau wie (29.2) aussieht. Die Gleichung (31.1) enthält zugleich, da die Konstruktion der Extremalen bereits erfolgt ist, die Antwort auf das Problem von DARBOUX-SCHMIDT, wenn man nachweisen kann, daß die Flächen $\mathfrak{F}$ eindeutig durch $O(\mathfrak{F})$ bestimmbar sind, sobald diese Größe gewissen Bedingungen genügt. Nun ist $2\,O(\mathfrak{F}_g) = O_g$ und $\mathfrak{K}_g$ symmetrisch in bezug auf ϑ_n. Es genügt also für die eindeutige Bestimmung von $\mathfrak{F}_g$ durch $O(\mathfrak{F}_g)$ zu zeigen, daß $\mathfrak{K}_g$ durch die Vorgabe seiner Oberfläche (sobald diese Größe gewissen Bedingungen genügt) bis auf eine Parallelverschiebung eindeutig bestimmt ist. Diese Tatsache wird nun in der folgenden Nummer bewiesen.

Die Oberfläche eines Extremalkörpers K_g. Eindeutigkeitsfragen.

32. Zur Bestimmung der Oberfläche O_g eines Extremalkörpers verwenden wir die vorhin angegebene Beziehung

$$O = (n-1)\,W_{n-1}\int \psi^{n-2}(u)\,ds$$

unter Zugrundelegung der Gleichung der jeweiligen Extremalen C_g. Wir erhalten dann wegen

$$\varphi\frac{dv}{ds} \pm \frac{Q_g}{\sqrt{M^2 - Q_g^2}} = 0$$

mit Rücksicht auf

$$(32.1) \qquad ds^2 = du^2 + \varphi^2(v)\,dv^2,$$

$$ds^2 = \frac{M^2\,du^2}{M^2 - Q_g^2}.$$

[48]) Wir schreiben hier $\mathfrak{F}_g$ an Stelle von O_g der vorigen Nummer.

Nun ist für die Klasse I $v_a = v_b = 0$. Es wird also, wenn man die Oberfläche mit $O_{\gamma\bar{\gamma}}$ bezeichnet,

$$O_{\gamma\bar{\gamma}} = 2\,(n-1)\,W_{n-1}\int_a^b \frac{M\,\psi^{n-2}\,du}{\sqrt{M^2 - Q_{\gamma\bar{\gamma}}^2}}$$

Dabei ist, wie nochmals wiederholt sei:

$$Q_{\gamma\bar{\gamma}} = \left(G(a)\cos\bar{\gamma} + G(b)\cos\gamma\right)\omega(u) - \left(\omega(a)\cos\bar{\gamma} + \omega(b)\cos\gamma\right)G(u)$$

und

$$M = G(a)\,\omega(b) - G(b)\,\omega(a).$$

Für die Oberfläche eines Körpers $\mathfrak{K}_g$ von der Klasse II finden wir entsprechend

(32. 2) $$O_\gamma = 2\,(n-1)\,W_{n-1}\int_a^b \frac{\varphi(u)\,\psi^{n-2}(u)\,M + \psi^{n-2}(a)\,\varphi(a)\,Q_\gamma(u)}{\varphi\sqrt{M^2 - Q_\gamma^2}}\,du$$

mit $Q_\gamma = Q_{\gamma,0}$, und schließlich für die Oberfläche eines Körpers $\mathfrak{K}_q$ von der Klasse III

$$O_q = 2\,(n-1)\,W_{n-1}\left\{\psi^{n-2}(a)\,\varphi(a) + \psi^{n-2}(b)\,\varphi(b)\right\}q +$$

$$+\,2\,(n-1)\,W_{n-1}\int_a^b \frac{\psi^{n-2}(u)\,M + \psi^{n-2}(a)\,Q(u)}{\sqrt{M^2 - Q^2}}\,du.$$

Für den elliptisch-sphärischen Fall kann q nicht beliebig sein, vielmehr wird dieses q, falls es eine schlichte Überdeckung des zugehörigen Raumes durch den Körper fordert, nach oben beschränkt bleiben. Die entsprechenden Ungleichungen für q werden an der richtigen Stelle angegeben werden.

Der Hauptsatz dieser Nummer, der zugleich die eindeutige Bestimmung der Extremalkörper sichert, lautet folgendermaßen:

Die Oberflächen $O_{\gamma\bar{\gamma}}$, O_γ und O_q sind monotone Funktionen ihrer Parameter. Da ferner die drei Familien I, II, III der Extremalkörper stetig ineinander übergehen, so gibt es zu jedem O, das der Ungleichung

$$O > 2\,(n-1)\,W_{n-1}\int_a^b \psi^{n-2}(u)\,du = O^*$$

genügt (und im elliptisch-sphärischen Fall den bewußten Ungleichungen nach oben) nur einen Extremalkörper, der die vorgegebene Oberfläche besitzt.

Wir beweisen diesen Satz zuerst für die Körper $\mathfrak{K}_{\gamma\bar{\gamma}}$ der Klasse I. Für diese gilt

(32. 4) $$O_{\gamma\bar{\gamma}} = 2\,(n-1)\,W_{n-1}\int_a^b \frac{M\,\psi^{n-2}(u)\,du}{\sqrt{M^2 - Q_{\gamma\bar{\gamma}}^2}}.$$

Da hier der Integrand definitionsgemäß in jedem abgeschlossenen Teilintervall von $\gamma_0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ endlich bleibt[49]), so kann man unter dem Integralzeichen ohne weiteres differenzieren. Wir erhalten dann nach einigen Rechnungen

$$(32.5)\quad \frac{dO_{\gamma\bar{\gamma}}}{d\gamma} = 2(n-1)\, W_{n-1} M \int_a^b \frac{F(u)}{\varphi\left(\sqrt{M^2 - Q_{\gamma\bar{\gamma}}^2}\right)^3} \cdot \frac{dQ_{\gamma\bar{\gamma}}}{d\gamma}\, du = 2(n-1)\, W_{n-1}\, J(a,b)$$

mit

$$(32.6)\quad F(u) = \{G(a)\,\psi^{n-1}(u) - \omega(a)\}\cos\gamma + \{G(b)\,\psi^{n-1}(u) - \omega(b)\}\cos\bar{\gamma}.$$

Nun wird der Parameter γ durch die Gleichung

$$(32.7)\quad J(\gamma,\bar{\gamma}) = \int_a^b \frac{Q_{\gamma\bar{\gamma}}\, du}{\varphi\sqrt{M^2 - Q_{\gamma\bar{\gamma}}}} = 0$$

definiert, und daraus folgt durch Differentiation nach γ

$$(32.8)\quad \int_a^b \frac{1}{\varphi\left(M^2 - Q_{\gamma\bar{\gamma}}^2\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{dQ_{\gamma\bar{\gamma}}}{d\gamma}\, du = 0.$$

Dabei ist

$$\frac{dQ_{\gamma\bar{\gamma}}}{d\gamma} = \frac{\partial Q_{\gamma\bar{\gamma}}}{\partial\gamma} + \frac{\partial Q_{\gamma\bar{\gamma}}}{\partial\bar{\gamma}}\frac{d\bar{\gamma}}{d\gamma},$$

wobei die Abhängigkeit der Funktion $\bar{\gamma}$ von γ durch (32.7) gegeben wird.

Nun ist

$$F'(u) = (n-1)\{G(a)\cos\gamma + G(b)\cos\bar{\gamma}\}\,\psi^{n-2}(u)\,\varphi(u) > 0,$$

$F(u)$ ist also im Intervall $a \leqq u \leqq b$ monoton wachsend. Setzt man

$$F^*(u) = F(u) - F(a),$$

so ist $F^*(u)$ in demselben Intervall $\geqq 0$, und man erhält schließlich mit Rücksicht auf (32.7),

$$\frac{dO_{\gamma\bar{\gamma}}}{d\gamma} = 2(n-1)\, W_{n-1} M \int_a^b \frac{F^*(u)}{\varphi\,(M^2 - Q_{\gamma\bar{\gamma}}^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{dQ_{\gamma\bar{\gamma}}}{d\gamma}\, du = 0.$$

33. Um jetzt zu zeigen, daß die rechte Seite negativ ist, rechnen wir $\frac{dQ_{\gamma\bar{\gamma}}}{d\gamma}$ explizit aus.

Es wird

$$\frac{dQ_{\gamma\bar{\gamma}}}{d\gamma} = y(u) = -\sin\bar{\gamma}\,\{G(b)\,\omega(u) - G(u)\,\omega(b)\}\frac{d\bar{\gamma}}{d\gamma} + \\ + \sin\gamma\,\{\omega(a)\,G(u) - \omega(u)\,G(a)\}.$$

[49]) Für jedes γ aus dem Intervall $\gamma_0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$, ist $0 < \bar{\gamma} < \frac{\pi}{2}$.

Wegen der unmittelbar zu beweisenden Tatsache $\frac{d\bar{\gamma}}{d\gamma} > 0$ [50]) ist $y(a) > 0$ und $y(b) < 0$. Wenn wir zeigen können, daß $y(u)$ monoton ist, so wird hiermit die Existenz einer einzigen Nullstelle gesichert. Setzt man aber $Y(u) = -y(u)$, so ist

$$Y(u) = \{G(a)\,\mu + G(b)\,\nu\}\,\omega(u) - \{\omega(a)\,\mu + \omega(b)\,\nu\}\,G(u)$$

mit $\mu, \nu > 0$, und wir haben in Nr. 12 gelernt, daß diese Funktion monoton ist.

Zusammenfassend kann man also sagen: Die Funktion $\frac{dQ_{\gamma\bar{\gamma}}}{d\gamma}$ ist für $u = a$ größer als Null, für $u = b$ kleiner als Null und nimmt zwischen a und b monoton ab. Sie besitzt zwischen a und b eine einzige Nullstelle $u = a^*$.

Nach dem zweiten Mittelwertsatz ist nun, da $F^*(u) \geqq 0$ und monoton ist,

$$\int_a^{a^*} \frac{F^*(u)}{\varphi\,(M^2 - Q_{\gamma\bar{\gamma}}^2)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{dQ_{\gamma\bar{\gamma}}}{d\gamma}\,du = F^*(\xi)\int_a^{a^*} \frac{1}{\varphi\,(M^2 - Q_{\gamma\bar{\gamma}}^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{dQ_{\gamma\bar{\gamma}}}{d\gamma}\,du$$

und

$$\int_{a^*}^{b} \frac{F^*(u)}{\varphi\,(M^2 - Q_{\gamma\bar{\gamma}}^2)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{dQ_{\gamma\bar{\gamma}}}{d\gamma} = F^*(\eta)\int_{a^*}^{b} \frac{1}{\varphi\,(M^2 - Q_{\gamma\bar{\gamma}}^2)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{dQ_{\gamma\bar{\gamma}}}{d\gamma}\,du$$

mit $$a < \xi < a^* < \eta < b.$$

Infolgedessen wird wegen (32. 7)

$$J(a,b) = \{F^*(\xi) - F^*(\eta)\}\int_a^{a^*} \frac{1}{\varphi\,(M^2 - Q_{\gamma\bar{\gamma}}^2)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{dQ_{\gamma\bar{\gamma}}}{d\gamma}\,du < 0.$$

Es ist also tatsächlich $\frac{dO_{\gamma\bar{\gamma}}}{d\gamma} < 0$ und somit auch zugleich die Monotonie von $O_{\gamma\bar{\gamma}}$ nachgewiesen.

Der Beweis der Monotonie von O_γ wird ähnlich geführt.

Zuerst bemerken wir, daß in (32. 2)

$$\lim_{u \to a} \frac{\varphi(u)\,\psi^{n-2}(u)\,M + \psi^{n-2}(a)\,\varphi(a)\,Q_\gamma(u)}{\sqrt{M^2 - Q_\gamma^2}} = 0 \qquad (0 < \gamma < \gamma_0)$$

ist, man kann also unbedenklich unter dem Integralzeichen differenzieren. Wir erhalten dann

$$O_\gamma' = 2\,(n-1)\,W_{n-1}\,M\int_a^b \frac{M\,\psi^{n-2}(a)\,\varphi(a) + \psi^{n-2}(u)\,\varphi(u)\,Q_\gamma(u)}{\varphi\,(M^2 - Q_\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{\partial Q_\gamma}{\partial\gamma}\,du$$

oder

$$O_\gamma' = 2\,(n-1)\,W_{n-1}\,M\int_a^b \frac{F(u)}{\varphi\,(M^2 - Q_\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{\partial Q_\gamma}{\partial\gamma}\,du.$$

[50]) Durch Differentiation von $J(\gamma, \bar{\gamma}) = 0$.

Da nun die Funktion $F(u)$, wie man unmittelbar nachprüft, eine positive Ableitung hat, und dazu $F(a) = 0$ ist, so ist sie im Intervall $a \leqq u \leqq b$ positiv. Da ferner $\frac{\partial Q_\gamma}{\partial \gamma} < 0$ ist, so ist $O'_\gamma < 0$. Hiermit ist auch die Monotonie von O_γ bewiesen worden.

Für die Klasse III ist schließlich

$$\frac{dO_q}{dq} = 2(n-1)\, W_{n-1}\{\psi^{n-2}(a)\,\varphi(a) + \psi^{n-2}(b)\,\varphi(b)\} > 0,$$

woraus dann auch die Monotonie von O_q folgt.

Nun ist ferner

$$O_{\gamma_0, \frac{\pi}{2}} = O_{\gamma_0}, \quad \lim_{q \to 0} O_q = O_0.$$

Die drei Funktionen $O_{\gamma\bar{\gamma}}, O_\gamma, O_q$ können hiermit als eine monoton wachsende Funktion eines Parameters γ bzw. q betrachtet werden. Die Gleichung

$$O = O_g \tag{33. 1}$$

ist für jedes $O > O^*$ eindeutig[51]) lösbar. Für

$$O^* < O < O_{\gamma_0} \tag{33. 2}$$

ist der entsprechende Körper $\mathfrak{K}_g$ von der Klasse I. Für

$$O_{\gamma_0} \leqq O < O_0 \tag{33. 3}$$

ist $\mathfrak{K}_g$ ein Körper von der Klasse II, und schließlich für

$$O_0 \leqq O \tag{33. 4}$$

ein Körper der Klasse III.

Hiermit ist die Schmidtsche Aufgabe vollständig gelöst. Denn konstruiert man für jedes zulässige O den durch (33. 1) eindeutig bestimmten Körper $\mathfrak{K}_g$, so erhält man aus (30. 1)

$$(n-1)(V - V_g) = -2\varrho_g R(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}_g) \leqq 0. \tag{33. 5}$$

Daraus folgt für jeden zu $\mathfrak{K}_g$ inkongruenten Körper

$$V - V_g < 0.$$

Daß $V = V_g$ nur dann gilt, wenn V zu V_g kongruent ist, folgt aus (33. 5) unmittelbar. Denn in diesem Falle ist $R(\mathfrak{K}_g, \mathfrak{K}_g) = 0$ und aus dieser Bedingung folgt, daß die beiden Hälften O_1 bzw. O_2 zu den beiden symmetrischen Hälften, aus denen O_g besteht, kongruent sein müssen. Hiermit ist aber $\mathfrak{K}$ bis auf eine Parallelverschiebung längs der ϑ_n-Linie (und im Falle III auch bis auf den Parameter q, der durch $O = O_g$ festgelegt wird) eindeutig bestimmt.

[51]) Für den elliptisch-sphärischen Fall die üblichen Einschränkungen nach oben [vgl. (14. 9)].

34. Für die DARBOUX-SCHMIDTsche Aufgabe erhalten wir ähnliche Ergebnisse. Dort hat die Gleichung

$$O(\mathfrak{F}) = O(\mathfrak{F}_g)$$

für jedes $O(\mathfrak{F})$, das der Ungleichung

$$O(\mathfrak{F}) > (n-1)\, W_{n-1} \int_a^b \varphi^{n-2}(u)\, du = O(\mathfrak{F}^*)$$

genügt, nur eine Lösung[52]). Konstruiert man dann dieses eindeutig bestimmte Flächenstück, so erhält man aus (31. 1)

$$V(\mathfrak{F}) - V(\mathfrak{F}_g) = -\frac{2\varrho_g}{n-1} R_n(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}_g) \leqq 0,$$

was die vollständige Beantwortung nebst der Einzigkeitsfrage enthält. Die Lösung unseres Problems ist für

$$O(\mathfrak{F}^*) < O < O(\mathfrak{F}_{\gamma_0})$$

ein Extremalflächenstück von der Klasse I und wird durch eine nichteuklidische Rotation einer Extremalen von der Klasse I erhalten. $O(\mathfrak{F}_\gamma)$ bedeutet hier die Hälfte von O_g und kann aus den vorherigen Ausführungen bestimmt werden.

Für

$$O(\mathfrak{F}_{\gamma_0}) \leqq O < O(\mathfrak{F}_0),$$

wobei $\mathfrak{F}_0$ das durch die Rotation der Extremalen C_0 erzeugte Flächenstück darstellt, haben wir als Lösung ein Extremalflächenstück von der Klasse II. Gilt nun

$$O(\mathfrak{F}_0) \leqq O,$$

so erhält man das entsprechende Extremalflächenstück durch teleskopartige Verschiebung von $\mathfrak{F}_0$ nach den positiven ϑ_n. Im Falle $K > 0$ treten nach oben Einschränkungen für q ein, die aus den entsprechenden Einschränkungen für das SCHMIDTsche Problem sofort zu erhalten sind.

35. Nun eine Schlußbemerkung: Bei der Ableitung der isoperimetrischen Gleichung (30. 1) spielte die Tatsache, daß $\mathfrak{K}$ durch die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ des „Zylinders“

35. 1) $$\frac{\varphi(b)}{K} \leqq \frac{\varphi(u)}{K} \leqq \frac{\varphi(a)}{K}$$

in zwei Teile $\mathfrak{D}_1$ bzw. $\mathfrak{D}_2$ zerlegt wird, eine wesentliche Rolle.

Wir wollen hier andeutungsweise zeigen, wie man durch das STEINERsche Symmetrisierungsverfahren diese Voraussetzung aufheben kann.

---

[52]) Für den elliptisch-sphärischen Fall treten, sobald man eine schlichte Überdeckung des Raumes verlangt, die üblichen Schranken nach oben ein. Man kann sie gleich der entsprechenden Schranke für die SCHMIDTsche Aufgabe annehmen.

Ist $\mathfrak{K}$ ein beliebiger Körper, von dem lediglich verlangt wird, daß seine Projektion längs ϑ_n den Ringraum

$$\frac{\varphi(b)}{K} \leqq \frac{\overset{n-1}{\underset{1}{\Pi}} \varphi(\vartheta_\nu)}{K} \leqq \frac{\varphi(a)}{K}$$

vollständig ausfüllt, so konstruieren wir mit Steiner den zugehörigen symmetrischen Körper folgendermaßen: Es sei zuerst vorausgesetzt, daß die ϑ_n-Linie durch $P(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{n-1}, 0)$ die Oberfläche von $\mathfrak{K}$ in endlich vielen Randpunkten trifft, und es seien $\vartheta_i', \vartheta_i''$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ $(i = 1, 2, \ldots, \varrho)$ die ϑ_n-Koordinaten des i-ten „Eingangspunktes" bzw. „Ausgangspunktes". Wir setzen

$$\bar{\vartheta}_n = \frac{\sum_i (\vartheta_i'' - \vartheta_i')}{m}, \quad \bar{\bar{\vartheta}}_n = -\bar{\vartheta}_n. \tag{35. 2}$$

Läßt man P alle derartigen Punkte von $\mathfrak{K}$ durchlaufen, so beschreibt der Punkt $P(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}, \bar{\vartheta}_n)$ bzw. $P(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}, \bar{\bar{\vartheta}}_n)$ den Rand eines in bezug auf $\vartheta_n = 0$ symmetrischen Körpers $\bar{\mathfrak{K}}$, den wir als symmetrisierten Körper bezeichnen werden.

Die Punktmenge $\mathfrak{N}$ der Punkte P, welche die Eigenschaft haben, daß die durch P gehende ϑ_n-Linie die Oberfläche $\mathfrak{O}$ von $\mathfrak{K}$ in unendlich vielen Punkten schneidet, ist nach dem früher Gesagten eine Punktmenge vom $(n-1)$-dimensionalen Inhalt Null. Es existieren also in beliebiger Nähe eines solchen Punktes P innere Punkte P', die durch (35. 2) definiert werden, und wir können dann für alle Punkte von $\mathfrak{N}$ den entsprechenden Punkt $\bar{P}$ durch $\bar{P} = \lim_{P' \to P} \bar{P}'$ definieren. Nun beweist man für $\bar{\mathfrak{K}}$: Bei der Symmetrisierung bleibt das Volumen V unverändert, während O im allgemeinen kleiner wird, also $\bar{O} \leqq O$. Die Gleichheit $\bar{O} = O$ gilt nur dann, wenn $\mathfrak{K}$ und $\bar{\mathfrak{K}}$ kongruent sind, also wenn $\mathfrak{K}$ schon in bezug auf $\vartheta_n = 0$ symmetrisch ist.

Schreibt man die isoperimetrische Gleichung für den symmetrisierten Körper $\bar{\mathfrak{K}}$, so wird

$$(n-1)(V - V_g) = \varrho_g(\bar{O} - O_g) - 2\,\varrho_\gamma R(\bar{\mathfrak{K}}, \mathfrak{K}_g)$$

oder

$$(n-1)(V - V_g) = \varrho_g(O - O_g) - \varrho_g(O - \bar{O}) - 2\,\varrho_g R(\bar{\mathfrak{K}}, \mathfrak{K}_g).$$

Wegen $\bar{O} \leqq O$ ist also

$$(n-1)(V - V_g) \leqq \varrho_g(O - O_g) - 2\,\varrho_g R(\bar{\mathfrak{K}}, \mathfrak{K}_g) \tag{35. 3}$$

und wir können für den Extremfall schließen wie vorhin.

Der Fall $n = 2$ und der Grenzfall $a = 0$.

36. Nach dieser ausführlichen Behandlung des Falles $n > 2$ wenden ir uns kurz dem Fall $n = 2$ zu. Wir haben schon früher erwähnt, daß für $= 2$ die Klasse II leer ist. Wählt man nämlich in (13. 3) $\bar{\gamma} = \gamma$, so ist für des γ aus dem Intervall

$$0 \leqq \gamma < \frac{\pi}{2}$$

6. 1) $$v_a(\gamma) = \int_a^b \frac{Q_{\gamma\gamma}\, du}{\varphi \sqrt{M^2 - Q_{\gamma\gamma}^2}} = 0,$$

it

$$Q_{\gamma\gamma} = Q(u) \cos\gamma.$$

aß $v_a(\gamma)$ nun gleich Null ist, kann man am besten mit Hilfe der in Nr. 5 ngeführten Veränderlichen

$$\sigma = \int_a^u \frac{dt}{\varphi(t)}$$

insehen, wodurch der Streifen

$$a \leqq u \leqq b$$

uf den Streifen

$$0 \leqq \sigma \leqq \varrho \qquad \left(\varrho = \int_a^b \frac{dt}{\varphi(t)}\right)$$

bgebildet wird.

Nach den Ergebnissen von Nr. 9 ist aber

$$Q(u) = F(\sigma) = \frac{Q(b)}{\bar{\varphi}(\varrho)} \{\bar{\varphi}(\sigma) + \bar{\varphi}(\sigma - \varrho)\},$$

obei der Strich immer die mit $-K$ an Stelle von K gebildete Funktion edeutet. Dies kann man auch direkt nachprüfen, indem man feststellt, daß (σ) der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{d\sigma^2} - K y = 0$$

nügt.

Führt man hier durch

6. 2) $$x = \sigma - \frac{\varrho}{2}$$

ie Veränderliche x ein, so wird

$$Q_{\gamma\gamma} = Q(b) \frac{\bar{\varphi}(x)}{\bar{\varphi}\left(\frac{\varrho}{2}\right)} \cos\gamma.$$

Hiermit erhält man die Differentialgleichung der Extremalen in der x, v-Ebene, wenn man noch dazu $2\,\varrho_0 = \varrho$ setzt, in der Form:

$$\frac{dv}{dx} \pm \frac{\overline{\varphi}(x)\cos\gamma}{\sqrt{\varphi^2(\varrho_0) - \overline{\varphi}^2(x)\cos^2\gamma}} = 0.$$

Daß das Integral (36. 1) gleich Null ist, folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß dieses mittels (36. 3) in das Integral

$$v_a(\gamma) = \int_{-\varrho_0}^{+\varrho_0} \frac{\overline{\varphi}(x)\cos\gamma\,dx}{\sqrt{\overline{\varphi}^2(\varrho_0) - \overline{\varphi}^2(x)\cos^2\gamma}}$$

übergeht, das wegen $\overline{\varphi}(-x) = -\overline{\varphi}(x)$ verschwinden muß. Die betreffenden Extremalen bestehen aus zwei in bezug auf die x-Achse symmetrischen Kurvenbögen, Lösungen der obigen Differentialgleichung. Diese Extremalen können auch in x und v direkt erhalten werden, wenn man die Aufgabe von Erhard Schmidt unter Zugrundelegung der Metrik

$$ds^2 = \varphi^2(u)\{dx^2 + dv^2\}$$

löst, wobei u mit x durch die Gleichung

$$x = -\frac{\varrho}{2} + \int_a^u \frac{dt}{\varphi(t)}$$

verbunden ist. Wir verzichten indessen hier auf eine ausführlichere Behandlung dieses speziellen Falles, da dieser schon von Erhard Schmidt in seiner vorhin erwähnten Arbeit und in allgemeinerem Zusammenhang, sowie von mir mit Methoden dieser Arbeit studiert wurde[53]).

37. Zum Schluß soll noch kurz für $n > 2$ der Grenzfall $a \to 0$ behandelt werden. Für $a_0 \to 0$ geht $\mathfrak{H}_{ab}$, wie aus seiner Definition folgt, in den „Zylinder"

$$\frac{\varphi(b)}{K} \leqq \frac{\prod_1^{n-1} \varphi(\vartheta_\nu)}{K} \leqq \frac{1}{K} \qquad (K \gtrless 0)$$

über und die Ausdrücke $\frac{Q_{\gamma\bar{\gamma}}}{M}$, $\frac{Q_\gamma}{M}$, $\frac{Q}{M}$ konvergieren gegen die Polynome

[53]) l. c. Fußnote 2, sowie auch: Zum isoperimetrischen Problem für die nichteuklidischen Geometrien. Math. Ann. 118 (1943), S. 636–686.

$\frac{\omega(u)}{\omega(b)}\cos\gamma$, $\frac{\omega(u)}{\omega(b)}\cos\gamma$, $\frac{\omega(u)}{\omega(b)}$. Die Ausdrücke $v_a(\gamma, \bar{\gamma})$, $v_a(\gamma)$ konvergieren, e man leicht feststellen kann, gegen

$$v_0(\gamma) = \int_0^b \frac{\omega(x)\cos\gamma\, dx}{\varphi\sqrt{\omega^2(l) - \omega^2(x)\cos^2\gamma}}, \tag{7.1}$$

o gegen den Punkt, in dem der durch $u = \pm b$, $v = 0$ gehende Bogen des ɔdätischen Kreises ($v \geqq 0$) mit dem geodätischen Krümmungsradius $\frac{\omega(b)}{\cos\gamma}$ v-Achse schneidet. Ferner ist der Winkel der Normalen $\bar{n}$ in ($u = 0$, $= v_0$) wegen

$$\cos(n, u) = \frac{Q_{\gamma\bar{\gamma}}}{M} = \frac{\omega(u)}{\omega(b)}\cos\gamma$$

ich Null, die „Grenzextremale" trifft also die v-Linie senkrecht. Somit steht die „Extremalkurve" im Falle II aus dem halben Bogen des vorhin klärten geodätischen Kreises und der Strecke

$$0 \leqq v \leqq v_0 \qquad \left(0 \leqq \gamma \leqq \frac{\pi}{2}\right).$$

Falle III entstehen die Extremalen durch Auseinanderziehen der beiden nmetrischen Hälften der Extremalen C_0

$$v = \pm \int_u^b \frac{\omega(x)\, dx}{\varphi\sqrt{\omega^2(b) - \omega^2(x)}}.$$

ß im elliptisch-sphärischen Fall (37. 1) kleiner als $\frac{\pi}{2\sqrt{K}}$ ausfällt und somit C_0 wendigerweise im Fundamentalbereich liegt, ist leicht aus dem früher sagten zu schließen und kann auch in meinen vorhin erwähnten Arbeiten ehgelesen werden. Interessant ist die Tatsache, die ich hier auch besonders vorheben möchte, daß die Extremalen der Klasse II und III eine Ecke der v-Achse [bei $v = \pm v_0(\gamma)$] aufweisen. Extremalen von der Klasse I t es nicht, da das Integral (37. 1) für jedes γ aus dem Intervall $0 \leqq \gamma \leqq \frac{\pi}{2}$ itiv ist.

Die Oberflächen $O_{\gamma\bar{\gamma}}$, O_γ konvergieren für $a \to 0$ gegen

$$O_\gamma = 2(n-1)\, W_{n-1} \int_0^b \frac{\omega(b)\, dx}{\sqrt{\omega^2(b) - \omega^2(x)\cos^2\gamma}},$$

also gegen die Oberfläche derjenigen geodätischen Kugel, welche durch ein nichteuklidische Rotation der Extremalen

$$v \pm \int_u^b \frac{\omega(x) \cos\gamma \, dx}{\varphi \sqrt{\omega^2(b) - \omega^2(x) \cos^2\gamma}} = 0$$

entsteht. Für die Extremalflächen von der Klasse III wird schließlich

$$O_q = 2(n-1) W_{n-1} \int_0^b \frac{\omega(b) \, dx}{\sqrt{\omega^2(b) - \omega^2(x)}} + 2(n-1) W_{n-1} q \psi^{n-2}(b) \varphi(b).$$

Für $n = 2$ ändert die Verschiebung des Streifens an dem Sachverhalt nichts es gibt wieder Extremalen von der Klasse I und III, die durch $u = 0$, $u = b$ gehen. Ähnliche Betrachtungen gelten auch für die Aufgabe von Darboux Schmidt, auf die hier aber nicht mehr eingegangen wird, da alles ziemlich wörtlich übertragbar ist. In einer daran anschließenden Arbeit wird außer der Steinerschen Symmetrisierung noch die allgemeinere, ebenfalls von Erhard Schmidt stammende Aufgabe behandelt, nämlich derjenige Fall, wo a nicht konstant ist, sondern nur der Ungleichung

$$0 \leqq a_0 \leqq a$$

unterworfen ist. Dabei wird noch b durch die Vorgabe von O bestimmt

(Eingegangen am 9. 7. 1943.)

Berichtigungen

zu der Arbeit von O. Zaubek in Bd. 49, S. 197—218.

S. 211: In der ersten Zeile von Satz 24 ist vor dem Worte „Maß funktion" das Wort „regulären" einzuschalten.

S. 212, Zeile 6 v. u.: Statt „eine in jedem Punkte des Raumes" soll es heißen „zu jedem Punkte des Raumes eine dort".

S. 212, Zeile 5 v. u.: Statt „23" soll es heißen „22".